NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. STOYANOV

Sur un déterminant circulaire

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 358-364
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__358_1>

[B1c]

SUR UN DÉTERMINANT CIRCULAIRE;

PAR M. G. STOYANOV.

Catalan a étudié (¹) un déterminant circulaire de degré n, composé de deux éléments, -1 et 1, le premier pris p fois. Comme valeur de ce déterminant, il trouve l'expression

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}2^{n-1}(n-2p) \quad (^2),$$

(¹) *Recherches sur les déterminants* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, t. XIII, 1ʳᵉ Partie, 1846, p. 534-555).

(²) Cette formule est imprimée avec une erreur dans *Die Deter-*

sous la condition $p < \frac{n}{2}$. Nous verrons que cette condition supposée par l'auteur comme nécessaire ne l'est pas, et qu'une autre condition essentielle, sans laquelle la résolution du problème n'est pas complète, a échappé à Catalan.

Nous nous proposons de généraliser le déterminant en question, en considérant le déterminant circulaire suivant :

$$\Delta_p^m = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a\;a\;a\;\dots\;a\;a}}^{p.}\;\overbrace{\hphantom{b\;b\;\dots\;b\;b\;b}}^{m.} \\ \left|\begin{array}{cccccccccccc}
a & a & a & \dots & a & a & b & b & \dots & b & b & b \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & \dots & b & b & a \\
a & a & a & \dots & b & b & b & b & \dots & b & a & a \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a & a & b & \dots & b & b & b & b & \dots & a & a & a \\
a & b & b & \dots & b & b & b & b & \dots & a & a & a \\
b & b & b & \dots & b & b & b & a & \dots & a & a & a \\
b & b & b & \dots & b & b & a & a & \dots & a & a & b \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b & b & b & \dots & a & a & a & a & \dots & b & b & b \\
b & b & a & \dots & a & a & a & a & \dots & b & b & b \\
b & a & a & \dots & a & a & a & b & \dots & b & b & b
\end{array}\right| \end{array},$$

où a et b sont des nombres réels ou imaginaires, et $p + m = n$.

Nous trouverons la valeur de Δ_p^m de deux manières :

1. *Par les propriétés générales des déter-*

---

minanten von E. Pascal. Il y a $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-3)}\,2^{n-1}(n-2p)$ au lieu de $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\,2^{n-1}(n-2p)$.

minants. — Aux éléments de la première colonne, nous additionnons les éléments de toutes les autres colonnes, et mettons devant le déterminant le facteur commun $pa + mb$ des éléments de la première colonne. Après cela, nous soustrayons les éléments de chaque ligne horizontale des éléments respectifs de la ligne située immédiatement au-dessous, en commençant par l'avant-dernière ligne. De cette manière, nous réduisons le déterminant Δ_p^m en un autre, celui du degré $p + m - 1$. Dans chaque ligne horizontale, nous prenons le facteur $a - b$ et enfin, en permutant circulairement les colonnes, nous recevons

$$\Delta_p^m = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(a-b)^{n-1}(pa+mb)\,D_p^m,$$

où

$$D_p^m = \begin{array}{c|ccccccccccccc|c}
 & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m-1.}} & & & & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{p-2.}} & \\
 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
p-1. & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & p-2. \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
m-2. & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & m-1. \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Le déterminant D_p^m joue un rôle important dans l'évaluation du déterminant Δ_p^m; c'est pourquoi nous le nommerons *le déterminant caractéristique de* Δ_p^m.

La structure du déterminant caractéristique D_p^m est bien évidente; nous remarquerons cependant que c'est uniquement la $p^{\text{ième}}$ ligne horizontale, qui ne contient pas l'élément -1; ensuite, c'est dans la $(p+1)^{\text{ère}}$ ligne que cet élément réapparaît et cette fois-ci sous la diagonale principale.

On trouve la valeur de D_p^m par réduction de son degré. Nous supposerons d'abord que les nombres p et m ne sont pas égaux entre eux.

1° $p < m$. Nous ajoutons la première ligne horizontale à la $(p+1)^{\text{ère}}$, la seconde à la $(p+2)^{\text{ième}}$ et ainsi de suite p fois. Par ce procédé, les p premières colonnes de D_p^m ne contiennent qu'une fois l'élément 1, tandis que tous les autres éléments sont 0; l'élément 1 se trouve dans la diagonale principale. Il s'ensuit que le déterminant est réduit au degré $m-1$; par sa construction, ce déterminant n'est autre chose que le déterminant caractéristique du déterminant circulaire Δ_p^{m-p}.

2° $p > m$. En suivant le même procédé que plus haut, mais avec les $m-1$ premières et $m-1$ dernières lignes horizontales, nous obtenons le déterminant caractéristique du déterminant circulaire Δ_{p-m}^m.

On voit que, dans les deux cas, le degré du déterminant se réduit du plus petit des deux nombres p et m.

Si les nombres p et m sont premiers entre eux, une première réduction du degré du déterminant D_p^m par p ou m donne un déterminant de la même forme, où $p \lesseqgtr m-p$ ou bien $p-m \gtreqless m$. Nous continuons la même réduction avec le déterminant obtenu, et, comme p et m sont des nombres entiers qui n'ont aucun diviseur commun, nous arrivons au cas où l'un des nombres p ou m est 1. Mais ici nous avons le déterminant D_k^1 ou D_1^k, dont la valeur est 1.

Si, au contraire, p et m ont un diviseur commun, par la réduction successive de degré du déterminant proposé, nous arrivons au cas où le déterminant ne contient qu'une seule des lettres a ou b, et dont la valeur est nulle. Par conséquent, si p et m ont un diviseur commun différent de 1, la valeur du déterminant Δ_p^m est nulle.

De ce que nous venons d'exposer il résulte que *la valeur du déterminant en question est*

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(a-b)^{n-1}(pa+mb) \qquad \text{ou} \qquad zéro,$$

suivant que p et m sont des nombres premiers entre eux ou non.

2. *Par les propriétés des déterminants circulaires.* — Profitons maintenant de la formule exprimant la valeur du déterminant circulaire, formé de n éléments différents $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Comme on sait (1), cette formule est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n),$$

où

$$\varphi(\alpha) = a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 + \ldots + a_n a^{n-1}$$

et les α sont les racines de l'équation binome $x^n - 1 = 0$.

Dans notre cas

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a, \qquad a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_n = b,$$

---

(1) STERN, *Einige Bemerkungen über eine Determinante* (*Journ. f. Math.*, Bd. 73, 1871, p. 374-380). — E. PASCAL, *Die Determinanten*, 1900, p. 73).

de sorte que

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) = \quad & a\quad (1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{p-1})\\ & + b\alpha^p(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}).\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\Delta_p^m &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\prod_{i=1}^{i=n}[\quad a\quad (1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{p-1})\\ &\qquad + b\alpha^p(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{m-1})]\\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(pa+mb)\prod_{i=1}^{i=n-1}[\quad a\quad (1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{p-1})\\ &\qquad + b\alpha_i^p(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{m-1})].\end{aligned}$$

Et, comme

$$1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{p-1} = -\alpha_i^p(1+\alpha_i+\ldots+\alpha_i^{m-1}),$$

nous recevons

$$\begin{aligned}\Delta_p^m = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} & (pa+mb)\\ \times (a-b)^{n-1} & \prod_{i=1}^{i=n-1}(1+\alpha_i+\alpha_i^2+\ldots+\alpha_i^{p-1}).\end{aligned}$$

Des facteurs sous le signe Π, nous concluons que si les nombres p et m, et par équivalence si p et n ont un diviseur commun, le produit devient nul. Donc $\Delta_p^m = 0$.

Au contraire, si les nombres p et m n'ont pas de diviseur commun, le déterminant a la valeur

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(pa+mb)(a-b)^{n-1}.$$

En effet, si nous faisons les multiplications sous le signe Π, ayant en vue les propriétés des fonctions symétriques des racines de l'équation binome $x^n - 1 = 0$, nous trouvons

$$\prod_{i=1}^{i=n-1}(1+\alpha_i+\alpha_i^2+\ldots+\alpha_i^{p-1})=1.$$

Cas particuliers. — Pour $a=1$, $b=0$, la valeur du déterminant Δ_p^m est

$$0, \quad -p, \quad p,$$

suivant que p et m ont respectivement un diviseur commun ou bien que $p+m=n$ est un nombre de la forme $4k-1$ ou $4k$, ou bien encore qu'il a la forme $4k+1$ ou $4k+2$.

Pour $a=-1$, $b>1$, nous avons le déterminant de Catalan. Nous arrivons donc au résultat que la condition $p<\frac{n}{2}$, posée par Catalan, loin d'être nécessaire, est tout à fait inutile. Au contraire, il est indispensable de considérer si les nombres p et n, ou ce qui est la même chose, p et m ont ou n'ont pas de diviseur commun, car, dans le premier cas, le déterminant de Catalan a la valeur nulle, ce que l'auteur n'a pas prévu.

Pour $a=-1$, $b=1$, $p=1$, nous avons le déterminant circulaire, étudié par Catalan et M. Fouret (1).