Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 332-336
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__332_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2162.

(1910, p. 432)

Soient ABCD *un tétraèdre régulier*, E *le milieu de* BC, F *le milieu de* DA; *on mène dans le plan* EDA *deux droites* EH *et* EK, *faisant avec* EF *des angles de* 30°.

Si l'on projette en P, Q, R, S, *un point* M *de l'une de ces droites sur les plans des faces du tétraèdre, la sphère* PQRS *est tangente à la sphère inscrite.*

Si M *est sur* EH, *le point inverse* M' (*qui a même sphère pédale*) *est sur* EK. *L'enveloppe de la droite* MM' *est une ellipse tangente aux droites* EH *et* EK *aux points* H *et* K *et dont le cercle principal est tangent aux droites* ED *et* EA *en* D *et* A, *le point* F *est foyer.*

Le lieu du centre de la sphère pédale est une hyperbole ayant même axe focal que l'ellipse précédente et dont les asymptotes sont parallèles aux droites EH *et* EK; *le milieu* O *de* EF *est un foyer.* SONDAT.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit a la longueur de l'arête du tétraèdre donné, nous avons

$$\mathrm{EA} = \mathrm{ED} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad \mathrm{DA} = a;$$

si l'on pose

$$\widehat{\mathrm{FEA}} = \theta,$$

on a

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

posons

$$\mathrm{EM} = l, \qquad \mathrm{EM}' = l',$$

les deux droites EM, EM′ devant être évidemment deux droites inverses du triangle DEA. On a

$$\mathrm{PM} = l\sin(\theta - 30^\circ) = \frac{l}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

$$\mathrm{MQ} = l\sin(\theta + 30^\circ) = \frac{l}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

de même

$$\mathrm{P'M'} = \frac{l'}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{2}),$$

$$\mathrm{Q'M'} = \frac{l'}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

d'où

$$\mathrm{PM} + \mathrm{QM} = l, \qquad \mathrm{P'M'} + \mathrm{Q'M'} = l';$$

or

$$\mathrm{PM} + \mathrm{QM} + \mathrm{RM} + \mathrm{SM} = \mathrm{P'M'} + \mathrm{Q'M'} + \mathrm{R'M'} + \mathrm{S'M'} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

comme

$$\mathrm{RM} = \mathrm{SM}, \qquad \mathrm{R'M'} = \mathrm{S'M'},$$

$$\mathrm{RM} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - l\right), \qquad \mathrm{R'M'} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - l'\right),$$

on a aussi

$$\mathrm{RM}.\mathrm{R'M'} = \mathrm{PM}.\mathrm{P'M'};$$

d'où

$$(1) \qquad 2ll' - (l + l')a\sqrt{6} + 2a^2 = 0.$$

On a, d'autre part, en désignant par I le centre de la sphère inscrite au tétraèdre, $EI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ et

$$\overline{IM}^2 = l^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{al\sqrt{6}}{4}, \qquad \overline{IM'}^2 = l'^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{al'\sqrt{6}}{4},$$

le centre ω de la sphère pédale est le milieu de MM' et

$$\overline{MM'}^2 = l^2 + l'^2 - ll',$$

comme

$$2\overline{I\omega}^2 + \frac{\overline{MM'}^2}{2} = \overline{IM}^2 + \overline{IM'}^2,$$

$$\overline{I\omega}^2 = \frac{2(l^2 + l'^2) - a^2}{8},$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$\overline{I\omega}^2 = \frac{a^2 - 2ll'}{2a\sqrt{6}},$$

soit ρ le rayon de la sphère pédale

$$\rho^2 = \frac{\overline{MM'}^2}{4} + PM.P'M' = \frac{3(l^2 + l'^2) - 2ll'}{12}$$

ou

$$\rho = \frac{a^2 - ll'}{a\sqrt{6}},$$

comme le rayon r de la sphère inscrite est égal à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$, on voit que

$$I\omega = \rho - r,$$

la sphère pédale est donc tangente à la sphère inscrite.

La relation (1) montre que les points M et M' se correspondent homographiquement sur EH et EK et que lorsque M vient en E,

$$l = 0, \qquad l' = \frac{2a}{\sqrt{6}} = EK,$$

MM′ enveloppe donc une conique tangente à EH et EK en H et K, son centre sera le point O_1 tel que

$$EO_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} \cos 30°,$$

l_1 et l_2 étant racines de l'équation

$$l^2 - al\sqrt{6} + a^2 = 0, \qquad EO_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{4},$$

la longueur de l'axe situé sur EF sera

$$(l_1 - l_2)\cos 30° = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

La perpendiculaire en D à DE passe par O, et l'on a

$$DO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

ce qui montre que les droites DE, AE sont tangentes au cercle principal de la conique considérée en D et A. La perpendiculaire en H à EH coupe EF en H′ et l'on a

$$EH' = \frac{2a\sqrt{2}}{3};$$

d'où

$$O_1H'.O_1E = \frac{a^2}{8} = \overline{O_1F}^2,$$

le point F est un foyer de la conique.

Le centre de la sphère pédale est le milieu de MM′, il est à l'intersection des parallèles à EH et EK menées par les milieux μ et μ' de EM et EM′, ces droites se correspondent homographiquement et le centre de la sphère pédale décrit une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles à EH et EK et ayant visiblement mêmes sommets situés sur EF que l'ellipse enveloppe de MM′.

Les foyers F_1 et F_2 seront tels que

$$O_1F_1 = O_1F_2 = DO_1 \frac{1}{\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

d'où

$$EF_1 = EO_1 - O_1F_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

F_1 est donc le milieu de EF.

Remarque. — Une étude plus complète de la question montre que les cercles sections de la sphère pédale par le plan EDA sont orthogonaux à un cercle fixe bitangent à l'hyperbole, lieu du centre de la sphère pédale, ils enveloppent par conséquent deux cercles dont l'un est la section par le plan EDA de la sphère inscrite.

Autre solution par M. Klug.