NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ET. DELASSUS

# Sur l'extension de la notion de vitesse

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 12 (1912), p. 30-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__30_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

[R1c]

# SUR L'EXTENSION DE LA NOTION DE VITESSE;

PAR M. ET. DELASSUS.

## I. — VITESSE D'UN SYSTÈME DE VECTEURS.

1. Considérons un point mobile M rapporté simultanément à deux trièdres fixes T et $T_1$. Les coordonnées $x, y, z$ et $x_1, y_1, z_1$ dans ces deux trièdres sont liées par les formules de transformation

$$x = a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dans lesquelles les coefficients sont des constantes dont la signification est bien connue. Par dérivation on en déduit

$$x' = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 y'_1 + \alpha_3 z'_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui exprime que le vecteur $V_1$ de composantes $x'_1$, $y'_1$, $z'_1$, dans $T_1$ a $x', y', z'$ pour composantes dans le trièdre T. Autrement dit, *le vecteur appliqué au point* M *et ayant pour composantes les dérivées des coordonnées est indépendant du trièdre de référence*.

C'est ce vecteur, qui est complètement déterminé par le mouvement du point, qu'on appelle *vitesse du point*.

Si le trièdre T est fixe et le trièdre $T_1$ mobile, les coefficients de la transformation ne sont plus des constantes et la dérivation donne

$$x' = (a' + \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 y_1 + \alpha'_3 z_1) + (\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 y'_1 + \alpha_3 z'_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qu'on interprète immédiatement en introduisant la vitesse d'entraînement et la vitesse relative et l'on obtient la règle classique de composition des vitesses.

2. Les raisonnements précédents s'appliquent sans aucune modification à un système S de vecteurs. Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$ ses coordonnées dans deux trièdres fixes. Les formules de transformation sont de la forme

$$\mathcal{X} = \alpha_1 \mathcal{X}_1 + \beta_1 \mathcal{Y}_1 + \gamma_1 \mathcal{Z}_1 + \lambda_1 \mathcal{L}_1 + \mu_1 \mathcal{M}_1 + \nu_1 \mathcal{N}_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et donnent par dérivation

$$\mathcal{X}' = \alpha_1 \mathcal{X}'_1 + \beta_1 \mathcal{Y}'_1 + \gamma_1 \mathcal{Z}'_1 + \lambda_1 \mathcal{L}'_1 + \mu_1 \mathcal{M}'_1 + \nu_1 \mathcal{N}'_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

qui montrent que le système ayant $\mathcal{X}'_1$, $\mathcal{Y}'_1$, $\mathcal{Z}'_1$, $\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{M}'_1$, $\mathcal{N}'_1$ pour coordonnées dans $T_1$ a $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, pour coordonnées dans T, ou encore :

*Étant donné un système* S *de vecteurs, variable avec le temps, le système* S' *ayant pour coordonnées les dérivées des coordonnées du système* S *est indépendant du trièdre de référence.*

Par analogie, nous dirons que *le système* S' *est la vitesse du système* S.

Supposons maintenant que le trièdre T soit fixe, mais que $T_1$ soit mobile; les coefficients de la transformation seront variables et la dérivation donnera

$$\begin{aligned}\mathcal{X}' = {} & (\alpha'_1 \mathcal{X}_1 + \beta'_1 \mathcal{Y}_1 + \gamma'_1 \mathcal{Z}_1 + \lambda'_1 \mathcal{L}_1 + \mu'_1 \mathcal{M}_1 + \nu'_1 \mathcal{N}_1) \\ & + (\alpha_1 \mathcal{X}'_1 + \beta_1 \mathcal{Y}'_1 + \gamma_1 \mathcal{Z}'_1 + \lambda_1 \mathcal{L}'_1 + \mu_1 \mathcal{M}'_1 + \nu_1 \mathcal{N}'_1),\end{aligned}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

qu'on interprétera encore en introduisant *le système* $S'_e$

*vitesse d'entraînement de* S et *le système* $S'_r$ *vitesse relative de* S, et l'on sera encore conduit à la propriété classique :

*La vitesse absolue d'un système de vecteurs est la résultante de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative.*

3. Effectuons simultanément la réduction des deux systèmes S et S' en un point fixe que nous prendrons pour origine d'un trièdre fixe de référence. On obtiendra ainsi un vecteur R et un couple G pour le système S et, de même, un vecteur R' et un couple G' pour le système S'.

Les coordonnées du point R seront $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, sa vitesse sera $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$, $\mathcal{Z}'$, c'est-à-dire équipollente au vecteur R'.

De même, les coordonnées du point G seront $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, sa vitesse sera $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, c'est-à-dire équipollente à G', de sorte que :

*Si l'on réduit simultanément en un point fixe un système* S *de vecteurs et sa vitesse* S', *les éléments de réduction de* S' *sont respectivement équipollents aux vitesses des extrémités des éléments de réduction de* S,

théorème de Cinématique qui a la même forme que l'interprétation géométrique bien connue des théorèmes sur les quantités de mouvement et peut, d'ailleurs, fournir cette interprétation comme conséquence presque immédiate.

4. La notion de vitesse d'un système de vecteurs est absolument distincte de la notion bien connue de *dérivée géométrique d'un vecteur*. Ces deux notions

ne coïncident que dans le cas où le système S se réduit à un vecteur unique variable, mais dont l'origine reste fixe.

La vitesse d'un système de vecteurs s'introduit tout naturellement en Dynamique par la remarque classique que les coordonnées

$$x'', \quad y'', \quad z'', \quad yz''-zy'', \quad zx''-xz'', \quad xy''-yx'',$$

du vecteur accélération d'un point sont les dérivées des coordonnées

$$x', \quad y', \quad z', \quad yz'-zy', \quad zx'-xz', \quad xy'-yx',$$

du vecteur vitesse de ce point, ce qui permet de dire, au sens que nous adoptons :

*L'accélération d'un point est la vitesse de sa vitesse.*

Si nous multiplions la vitesse par la masse, sa vitesse sera également multipliée par la masse ce qui donnera le vecteur opposé à la force d'inertie; donc :

*La force d'inertie d'un point matériel en mouvement est à chaque instant opposé à la vitesse de sa quantité de mouvement.*

La propriété existant pour tous les points d'un système matériel existe pour le système lui-même; donc :

*Le système des forces d'inertie d'un système matériel en mouvement est à chaque instant opposé à la vitesse de la quantité de mouvement de ce système matériel.*

Si l'on désigne par $\mathfrak{J}$ le système des forces d'inertie, par $\mathfrak{Q}$ le système des quantités de mouvement et par $\mathfrak{Q}$

sa vitesse, on a donc, à chaque instant, l'égalité géométrique

$$(\mathcal{J}) + (\mathcal{Q}') = 0.$$

5. La notion de vitesse d'un système de vecteurs s'introduit encore tout naturellement quand on considère deux systèmes variables S, $S_1$ et leur moment

$$\mathcal{M}^t(S, S_1) = \mathcal{L}\mathcal{X}_1 + \mathcal{M}\mathcal{Y}_1 + \mathcal{N}\mathcal{Z}_1 + \mathcal{X}\mathcal{L}_1 + \mathcal{Y}\mathcal{M}_1 + \mathcal{Z}\mathcal{N}_1.$$

On en déduit, par dérivation,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{M}^t(S, S_1) \\ = \; & (\mathcal{L}'\mathcal{X}_1 + \mathcal{M}'\mathcal{Y}_1 + \mathcal{N}'\mathcal{Z}_1 + \mathcal{X}'\mathcal{L}_1 + \mathcal{Y}'\mathcal{M}_1 + \mathcal{Z}'\mathcal{N}_1) \\ & + (\mathcal{L}\mathcal{X}'_1 + \mathcal{M}\mathcal{Y}'_1 + \mathcal{N}\mathcal{Z}'_1 + \mathcal{X}\mathcal{L}'_1 + \mathcal{Y}\mathcal{M}'_1 + \mathcal{Z}\mathcal{N}'_1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en introduisant les vitesses de S et de $S_1$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}^t(S, S_1) = \mathcal{M}^t(S', S_1) + \mathcal{M}^t(S, S'_1),$$

formule analogue à celle de la dérivée d'un produit et qui donne la dérivée d'un moment comme somme de deux moments. Si l'un des systèmes, $S_1$ par exemple, est fixe, la formule se réduit simplement à

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}^t(S, S_1) = \mathcal{M}^t(S', S_1).$$

## II. — Vitesse d'un solide.

6. M. Kœnigs, dans son *Traité de Cinématique*, a développé et rendu classique la notion de système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses dans un solide en mouvement.

L'une des propriétés essentielles est celle qui est relative à la composition des mouvements et s'énonce comme il suit :

Le système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses absolues d'un solide s'obtient en composant géométriquement le système représentatif de l'état des vitesses d'entraînement et le système représentatif de l'état des vitesses relatives.

Nous nous bornerons à faire remarquer que cette propriété s'énonce exactement comme celles qui sont relatives au point ou au système de vecteurs, sauf le remplacement de « vitesse » par « système représentatif de l'état des vitesses ».

Il y aurait donc intérêt, pour uniformiser le langage et avoir un même énoncé s'appliquant à un plus grand nombre de cas, à *convenir d'appeler* vitesse d'un solide *le système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses de ses différents points.*

Si l'on adopte cette définition on pourra dire :

*La vitesse d'un point quelconque d'un solide est le moment en ce point de la vitesse du solide ;*

et

*Qu'il s'agisse d'un point, d'un système de vecteurs ou d'un corps solide, la vitesse absolue est toujours la résultante géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative.*

7. Proposons-nous de chercher la vitesse d'entraînement d'un système $S_1$ de vecteurs, c'est-à-dire la vitesse d'un système invariable $S_1$ attaché à un corps solide connaissant la vitesse S de ce solide.

Soit O un point du solide. Soient R, G, $R_1$, $G_1$ les éléments de réduction de S et $S_1$ en ce point ; $R_1$ et $G_1$ sont invariables et attachés au solide.

La vitesse de $S_1$ est la résultante de sa vitesse dans la rotation R et de sa vitesse dans la translation G.

Dans la rotation R, le point O reste fixe, donc les éléments de réduction de la vitesse correspondante de $S_1$ sont équipollents aux vitesses des extrémités de $R_1$ et $G_1$, c'est-à-dire, puisque ces extrémités sont des points attachés au solide, équipollents aux moments de R aux points $R_1$ et $G_1$.

Dans la translation G du solide, le couple $G_1$ reste équivalent à lui-même, donc ne donne rien dans la vitesse de $S_1$. Quant au vecteur $R_1$, subissant cette translation, on voit immédiatement, soit géométriquement, soit analytiquement, que sa vitesse est un couple dont le moment changé de sens est celui de $R_1$ au point G.

En résumé, on a un vecteur et deux couples respectivement perpendiculaires aux trois plans $RR_1$, $R_1G$ et $RG_1$.

Si l'on permute S et $S_1$, c'est-à-dire si l'on cherche la vitesse d'entraînement de S dans un solide dont la vitesse serait $S_1$, on voit immédiatement que le vecteur et les deux couples ne font que changer de sens. Les deux vitesses obtenues sont donc opposées, fait géométrique qu'on peut écrire

$$(S'_e)_{S_1} + (S'_{1,e})_S = 0.$$

Enfin, soient $\Delta$, $\Delta_1$ les axes centraux de S et $S_1$, $\Delta'$ leur perpendiculaire commune et O un point du solide choisi de façon qu'a l'instant considéré il se trouve sur $\Delta'$. On voit immédiatement que, si l'on fait la réduction de S et $S_1$ en O, les directions R, G, $R_1$, $G_1$ sont toutes dans le plan perpendiculaire à $\Delta'$, donc le vecteur et les deux couples de la vitesse d'entraînement de $S_1$ sont dirigés suivant $\Delta'$ qui est ainsi l'axe central de cette vitesse; d'où cette propriété très simple :

*L'axe central de la vitesse d'un système de vecteurs attaché à un solide est la perpendiculaire commune à l'axe central de ce système et à l'axe central de la vitesse du solide.*