ÉT. DELASSUS

# Sur les forces vives équivalentes

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 12 (1912), p. 300-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__300_1>

[R8a]

# SUR LES FORCES VIVES ÉQUIVALENTES;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. En se plaçant au point de vue de la Mécanique analytique, la force vive apparaît uniquement comme fonction des $q$, des $q'$ et de $t$ servant à former les équations de Lagrange du mouvement du système matériel de sorte qu'on est naturellement conduit à considérer comme fonction équivalente à la force vive toute fonction des $q$, des $q'$ et de $t$ qui conduit aux mêmes équations de Lagrange.

Nous conviendrons de dire que toutes ces fonctions sont des *forces vives équivalentes* et, lorsqu'il y aura lieu, nous distinguerons la *force vive vraie* du système.

2. Considérons d'abord un système holonôme dont les équations de Lagrange, écrites avec la force vive vraie, sont

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

et soit

$$T_1 = T + \theta,$$

une force vive équivalente à T; elle donnera les équations de Lagrange

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+\theta)}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial (T+\theta)}{\partial q_i} = Q_i,$$

qui devront être équivalentes aux équations (1) et cela, quel que soit le système des forces données. Des équations (1) et (2) on déduit immédiatement les équations

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial q_i} = 0,$$

qui ne dépendent plus des forces et doivent être vérifiées quelle que soit la solution du système (1). Mais, en choisissant convenablement les forces, c'est-à-dire les Q, on peut obtenir une solution de (1) dans laquelle les valeurs initiales des $q$, des $q'$ et aussi des $q''$ sont arbitraires, et il en résulte immédiatement que les équations (3) doivent être des identités en y considérant $t$, les $q$, les $q'$ et les $q''$ comme des variables indépendantes.

Les $q''$ ne figurent pas dans les $\frac{\partial \theta}{\partial q_i}$; pour qu'ils ne figurent pas dans les $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta}{\partial q'_i}\right)$, il faut que les $\frac{\partial \theta}{\partial q'_i}$ ne contiennent pas les $q'$ c'est-à-dire que $\theta$ soit une fonction linéaire des $q'$

$$\theta = A_1 q'_1 + \ldots + A_n q'_n + B;$$

les identités (3) deviennent alors

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\right) + \sum_k \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}\right) q'_k \equiv 0,$$

et nous obtenons les conditions

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

qui expriment que $A_1, \ldots, A_n$, B sont les dérivées partielles, par rapport à $q_1, \ldots, q, t_n$, d'une même fonction

$$\Theta(q_1, \ldots, q_n, t),$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de $\theta$, qu'on a

$$\theta = \frac{d\Theta}{dt};$$

donc

*Pour que deux forces vives d'un système holonome soient équivalentes, il faut et il suffit que leur différence soit la dérivée totale d'une fonction des paramètres et du temps.*

3. Le fait que la condition est suffisante peut se vérifier immédiatement en remarquant que de l'égalité supposée

$$\theta = \frac{d\Theta}{dt}$$

on déduit immédiatement, par des identités bien connues,

$$\frac{\partial\theta}{\partial q'_i} = \frac{\partial}{\partial q'_i}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) = \frac{\partial\Theta}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\Theta}\right)$$

de sorte qu'on a bien les identités

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial q_i} \equiv 0.$$

Ce calcul ne suppose pas le système holonome. Dans le cas des systèmes non holonomes, les forces vives équivalentes véritablement à la force vive vraie ne sont pas forcément de la forme

$$T + \frac{d\Theta}{dt},$$

mais nous ne considérerons que celles qui sont de cette forme simple.

4. Nous devons maintenant nous proposer de chercher comment se transforment les propriétés de la force vive vraie quand on la remplace par une force vive équivalente.

Décomposons la force vive vraie en groupes homogènes

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

et faisons de même pour $\frac{d\Theta}{dt}$; c'est une fonction linéaire des $q'$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_0.$$

On aura donc

$$T' = T + \frac{d\Theta}{dt} = T_2 + (T_1 + \mathfrak{T}_1) + (T_0 + \mathfrak{T}_0),$$

de sorte que *la transformation par équivalence ne* *modifie jamais la portion homogène et du second degré de la force vive.*

Plus particulièrement, supposons qu'une force vive T du système soit indépendante du temps; pour qu'une autre force vive soit aussi indépendante du temps, il faut que $\Theta$ ne contienne pas $t$; alors $\frac{d\theta}{dt}$ est homogène par rapport aux $q'$ et l'on a

$$T' = T + \frac{d\theta}{dt} = T_2 + (T_1 + \mathfrak{T}_1) + T_0,$$

c'est-à-dire :

*Toutes les forces vives équivalentes et indépendantes du temps ont les mêmes portions* $T_2$ *et* $T_0$.

De ce que la force vive vraie est une forme essentiellement positive résulte immédiatement que sa portion $T_2$ est essentiellement positive. C'est cette propriété de $T_2$, et non celle de T, qui intervient dans les discussions de problèmes de dynamique; aussi, pour abréger, nous conviendrons de l'appeler *propriété essentielle de la force vive.* Du fait que la transformation n'altère jamais $T_2$ résulte donc :

*Toutes les forces vives équivalentes à la force vive vraie possèdent la propriété essentielle de la force vive.*

Enfin, à un point de vue tout à fait pratique, remarquons que si, en formant la force vive vraie, nous rencontrons un ensemble de termes formant une dérivée exacte, nous pourrons le négliger; on n'altérera pas ainsi les équations de Lagrange. En particulier, si nous rencontrons un terme additif qui soit fonction de $t$ seulement, nous pourrons le supprimer et nous supposerons toujours qu'on l'a fait.

5. Considérons le cas où, dans l'expression

$$Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n,$$

du travail virtuel des forces données, les coefficients $Q_1, \ldots, Q_n$ sont les dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

d'une fonction U *pouvant contenir le temps*. Cette fonction U ne correspond plus à la notion de fonction de forces c'est-à-dire à celle de travail ne dépendant que des positions initiale et finale, mais, au point de vue de la dynamique analytique, cette distinction n'a pas d'importance puisque, dans tous les cas, on arrive à la même forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

des équations de Lagrange lesquelles, en posant

$$G = T + U,$$

peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0,$$

ce qui montre que, pour les former, il est inutile théoriquement de connaître les deux fonctions T et U; il suffit de connaître leur somme G, le calcul séparé de T et de U apparaissant seulement comme un moyen commode de calculer G en la décomposant en deux parties dont on connaît des interprétations mécaniques simples.

Pour ces raisons, nous conviendrons de dire que U est *une fonction de forces* et que, *s'il y a une fonction de forces, le système de Lagrange possède une fonction génératrice* qui est la fonction G.

La fonction génératrice ne diffère de T que par U indépendant des $q'$. Si l'on décompose G et T en groupes homogènes, on aura :

$$G_2 = T_2,$$
$$G_1 = T_1,$$
$$G_0 = T_0 + U;$$

il résulte de la première de ces trois égalités que *la fonction génératrice d'un système de Lagrange possède la propriété essentielle de la force vive.*

La notion de fonctions génératrices équivalentes est identique à celle de forces vives équivalentes et les calculs développés alors nous donnent ce résultat :

*Deux fonctions génératrices équivalentes ne diffèrent que par la dérivée totale d'une fonction des paramètres et du temps. Toutes les fonctions génératrices possèdent la propriété essentielle de la force vive.*

6. Supposons que le problème possède l'intégrale des forces vives. C'est que T est homogène et que $t$ ne figure ni dans T, ni dans U; cette intégrale est

$$T - U = h.$$

Les équations de Lagrange ont alors une fonction génératrice T + U indépendante du temps et, par suite, une infinité de fonctions génératrices satisfaisant à cette condition et données par

$$G = T + U + \frac{d\Theta}{dt},$$

la fonction $\Theta$ ne dépendant pas de $t$. $\frac{d\Theta}{dt}$ étant linéaire et homogène par rapports aux $q'$, on aura donc

$$G_2 = T, \qquad G_0 = U,$$

de sorte qu'au moyen d'une quelconque de ces fonctions génératrices indépendantes du temps, l'intégrale des forces vives prendra la forme

$$G_2 - G_0 = h.$$

7. Réciproquement, supposons qu'un système de Lagrange soit tel que, parmi ses fonctions génératrices, il y en ait qui soient indépendantes de $t$. Soit G l'une d'elles au moyen de laquelle nous écrirons les équations de Lagrange. Si nous multiplions ces équations respectivement par les $q'$, puis qu'on additionne et qu'on fasse les réductions indiquées par M. Painlevé [1], on arrive à l'équation

$$\frac{d}{dt}(G_2 - G_0) = 0,$$

c'est-à-dire à l'intégrale première

$$G_2 - G_0 = \text{const}.$$

Cette intégrale a rigoureusement la même forme que celle des forces vives exprimée au moyen d'une fonction génératrice et l'on peut montrer, ce que nous ferons dans un Mémoire ultérieur, que le rôle particulier de l'intégrale des forces vives dans l'intégration tient uniquement à cette forme. Pour ces raisons, nous conviendrons d'appeler *intégrale des forces vives* l'intégrale précédente qui existe quand G est indépendante de $t$ en remarquant que les hypothèses restrictives relatives à l'existence de *l'intégrale ordinaire des forces vives* servent simplement à mettre en évidence un cas fréquent où l'on sait *a priori* qu'il y a une fonction génératrice

(1) Painlevé, *Leçons sur l'intégration des équations de la mécanique*, p. 89.

indépendante du temps, fonction dont on sait former l'expression immédiate au moyen de la force vive vraie et de la fonction de forces.

8. On est ainsi amené à se poser la question suivante :

*Ayant calculé les fonctions* T *et* U *et formé la fonction génératrice* T + U *qu'on suppose dépendre de $t$, reconnaître si le système de Lagrange admet des fonctions génératrices indépendantes de $t$ et les former?*

Soit

$$G' = G + \frac{d\theta}{dt},$$

une fonction génératrice indépendante du temps. On devra avoir

$$\frac{\partial G'}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial\theta}{\partial t}\right),$$

donc la condition cherchée est que $\frac{\partial G}{\partial t}$ soit une dérivée totale exacte. Cette condition exige que $\frac{\partial G}{\partial t}$ soit linéaire par rapport aux $q'$, donc que la portion $G_2$ soit indépendante de $t$. S'il en est ainsi, on aura

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial G_0}{\partial t},$$

et le calcul de vérification à faire pour voir si c'est une dérivée totale exacte est bien connu.

Supposons cette condition remplie; $\frac{\partial G}{\partial t}$ sera la dérivée totale $\frac{dW}{dt}$ d'une fonction W qu'on formera, par le procédé connu, au moyen de quadratures successives et l'égalité écrite plus haut s'écrira

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{d\Theta}{\partial t}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -W + K,$$

ce qui donnera $\Theta$ par une quadrature partielle. Ainsi :

*L'existence des fonctions génératrices indépendantes du temps se reconnaît par de simples différentiations et ces fonctions s'obtiennent ensuite par des quadratures.*

9. La condition précédente permet de généraliser encore plus la notion d'intégrale des forces vives.

Le calcul de M. Painlevé, fait sans aucune hypothèse sur la fonction génératrice, conduit à l'équation

$$\frac{d}{dt}(G_2 - G_0) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

d'où l'on conclut que si $\frac{\partial G}{\partial t}$ est une dérivée totale exacte

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dW}{dt}.$$

On a une intégrale première

$$G_2 - G_0 + W = h.$$

Nous remarquons immédiatement que l'hypothèse faite est précisément celle qui est relative à l'existence des fonctions génératrices indépendantes du temps. Ces fonctions seront données par

$$G' = G + \frac{d\Theta}{dt}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = -W + K,$$

d'où l'on déduit

$$G'_2 = G_2, \quad G'_0 = G_0 + \frac{\partial\Theta}{\partial t} = G_0 - W + K,$$

ce qui permet d'écrire l'intégrale considérée sous la forme

$$G'_2 - G'_0 + K = h,$$

ou

$$G'_2 - G'_0 = \text{const.},$$

qui est celle d'une intégrale des forces vives. Donc :

*Quand il y a une fonction génératrice, l'intégrale de M. Painlevé entraîne l'existence de fonctions génératrices indépendantes du temps au moyen desquelles elle devient une intégrale des forces vives.*

Cette remarque montre que tous les cas d'intégration qui supposent l'existence de l'intégrale ordinaire des forces vives s'appliqueront sans aucune modification au cas de l'intégrale complètement généralisée de M. Painlevé.

10. Ce qui précède nous amène à dire un mot des cas de décomposition de l'intégrale des forces vives dans sa forme générale.

Il arrive très fréquemment que, dans un problème à fonction génératrice, les paramètres se répartissent en plusieurs groupes $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$ et que la fonction génératrice immédiate, ou cette fonction convenablement modifiée par équivalence, se décompose sous la forme

$$G = G_a + G_b + \ldots$$

$G_a$ ne contenant que les $a$ et les $a'$, $G_b$ ne contenant que les $b$ et les $b'$, etc. Il est alors évident que le système de Lagrange se décompose en systèmes partiels ayant respectivement $G_a$, $G_b$, ... comme fonctions génératrices, s'intégrant indépendamment les uns des autres, et déterminant chacun les paramètres d'un groupe ; il est d'ailleurs facile de démontrer que $G_a$, $G_b$ possèdent, comme G, la propriété essentielle de la force vive, donc sont de vraies fonctions génératrices. Si G est indépendant de $t$, on a l'intégrale des forces vives

$$G_2 - G_0 = h;$$

mais $G_a$, $G_b$,... sont alors forcément indépendants de $t$ de sorte que chaque système partiel donne une intégrale des forces vives. On obtient ainsi

$$(G_a)_2 - (G_a)_0 = h_a$$
$$(G_b)_2 - (G_b)_0 = h_b$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et, si l'on fait la somme de toutes ces intégrales, on retrouve l'intégrale des forces vives du système total de Lagrange. Donc :

*S'il y a séparation des paramètres en plusieurs groupes, le système de Lagrange se décompose en systèmes partiels indépendants; si l'intégrale des forces vives existe pour le problème total, elle se décompose en plusieurs intégrales de forces vives correspondant aux divers groupes de paramètres.*

En particulier, si un paramètre est *isolé* c'est-à-dire forme un groupe à lui seul et si le problème total possède l'intégrale des forces vives, on aura cette intégrale pour le groupe composé de ce seul paramètre $a$, c'est-à-dire une équation

$$f(a)\,a'^2 - \varphi(a) = h,$$

de la forme classique

$$a'^2 = F(a),$$

qui déterminera ce paramètre indépendamment de tous les autres.

Il est à remarquer que si G dépend de $t$, on ne peut en conclure que $G_a$, $G_b$... dépendent tous de $t$; il peut arriver que certaines portions de G soient indépendantes de $t$, mais elles ne peuvent l'être toutes. Les portions $G_a$,... indépendantes du temps donneront des intégrales de forces vives, de sorte que :

*S'il y a séparation des paramètres en plusieurs groupes, il peut arriver que le problème total n'admette pas l'intégrale des forces vives et que, néanmoins, l'on ait une ou plusieurs intégrales de forces vives fournies par les problèmes partiels.*