

A. BUHL

**Sur les applications géométriques des  
intégrales curvilignes**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1912), p. 260-281

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1912\\_4\\_12\\_260\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12_260_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[ C 2 ]

**SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES  
DES INTÉGRALES CURVILIGNES;**

PAR M. A. BUHL.

---

1. Les intégrales curvilignes jouent, à coup sûr, en Mécanique et en Physique un rôle beaucoup plus important que partout ailleurs. Je laisse de côté les intégrales attachées à une fonction analytique  $f(z)$ , car c'est

un point sur lequel on s'arrête peu dans les cours qui s'adressent aux futurs techniciens. C'est pour ceux-ci qu'on devrait pouvoir présenter de nombreux calculs d'intégrales de ligne, uniquement dans le domaine réel, dès qu'on a donné la définition de ces intégrales.

Or c'est ce qu'on ne fait pas suffisamment. On dit aux élèves que les applications mécaniques et physiques seront nombreuses, mais on ne se sert guère, surtout dans l'espace à trois dimensions, d'intégrales curvilignes exprimant des êtres simples, des concepts géométriques élémentaires, des volumes par exemple.

Je pense que ce qui suit paraîtra combler, au moins partiellement, une telle lacune.

Je prends des volumes d'apparence classique qui pourraient tous s'exprimer individuellement par des intégrales doubles ; je montre que la connaissance de certains d'entre eux permet de déterminer les autres au moyen d'intégrales de ligne, toujours attachées à des contours très simples et parfaitement tangibles. Cela ne vaut-il pas mieux que de proposer d'intégrer une fonction imaginée au hasard le long d'un arc pris également au hasard ? Si un exercice de cette dernière catégorie peut apprendre à calculer, il ne montre guère l'intérêt du calcul. Mieux vaut avoir les deux choses.

Je me permets de renvoyer le lecteur intéressé par de telles considérations à un Mémoire, d'un degré un peu plus élevé, *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1910). Ici je suis resté dans des exemples très élémentaires et je n'ai employé, parmi les formules du Mémoire en question, que celles que je pouvais rétablir facilement sans le secours de la formule de Stokes ni d'aucune autre formule nécessitant une démonstration spéciale.

J'estime que tout ce qui suit est proposable comme exercice, aux élèves d'un cours de Mathématiques générales. J'en ai fait l'expérience à la Faculté de Toulouse.

Et pour bien faire remarquer que je n'exagère en rien la simplicité de mes problèmes, qu'il me suffise de dire que toutes les intégrales curvilignes qu'on rencontrera dans ce qui suit se ramènent toujours, et d'une manière immédiate, à des intégrales définies où les éléments différentiels sont de la forme  $u^m du$ .

2. Soit, dans l'espace à trois dimensions, un contour fermé  $\Sigma$ , fixe en général, par lequel passe une cloison  $S$ . Des volumes peuvent avoir  $S$  pour facette commune et être cependant complètement différents par ailleurs. Tel serait le cas de cônes ayant  $S$  pour base gauche commune mais dont les sommets seraient distincts. Deux volumes d'une telle nature ont *évidemment* une *différence* qui ne dépend pas de la cloison  $S$  mais seulement de son contour  $\Sigma$ . Car déformer  $S$ , sans toucher à  $\Sigma$ , c'est ajouter un *même* volume, en forme d'onglet, aux deux volumes considérés. Cela ne change en rien leur différence.

Cette remarque, absolument intuitive, est susceptible d'applications immédiates, à la fois élémentaires et intéressantes.

3. *Volumes cylindriques principaux.* — Projétons tous les points de  $S$  et de  $\Sigma$ , parallèlement à l'axe  $Oz$ , sur le plan  $Oxy$ . On définit ainsi le volume classique, à surface latérale cylindrique. Je désignerai ce volume par  $U_z$ . Si l'on avait projeté, parallèlement à  $Ox$  ou à  $Oy$ , on aurait eu des volumes analogues que je désignerai par  $U_x$  et  $U_y$ . Les trois volumes ainsi définis,



partie correspondant au rectangle BGFE, partie qui se retranchera à la descente. Donc finalement

$$U_x - U_y = \int_{\Sigma} xy \, dz.$$

Par des raisonnements analogues ou plus simplement par permutations circulaires on a le groupe des trois formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x - U_y = \int_{\Sigma} xy \, dz, \\ U_y - U_z = \int_{\Sigma} yz \, dx, \\ U_z - U_x = \int_{\Sigma} zx \, dy. \end{array} \right.$$

Celles-ci ne sont pas distinctes. L'addition des trois donne, en effet,  $0 = 0$ , l'intégrale obtenue dans l'addition portant sur une différentielle exacte  $d(xyz)$ . Dans ce qui suit, ceci ne doit pas empêcher de calculer les trois intégrales curvilignes précédentes ; c'est seulement, ce calcul fait, qu'on cherchera à voir, à titre de vérification, si la somme de leurs valeurs est bien nulle.

4. *Première application des formules* (1). — Soit une sphère de rayon R ayant son centre à l'origine. Soient M un point de la sphère et P sa projection sur Oxy. Quel est le lieu de M si l'angle MOP doit toujours être égal à l'angle POx =  $\theta$  ?

Ce lieu a évidemment pour équations, en coordonnées semi-polaires  $r$  et  $\theta$ ,

$$r = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta.$$

La première équation représente la projection de la courbe sur Oxy ; c'est un cercle de diamètre OA,

$\Lambda$  étant le point où la sphère coupe  $Ox$ . Je viens donc simplement de définir la courbe de Viviani.

La cloison  $S$  sera ici la portion de surface sphérique comprise entre l'arc de courbe obtenu en faisant varier  $\theta$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  et le quart de circonférence  $TA$ ,  $T$  étant le sommet de la courbe situé sur  $Oz$ . Le contour  $\Sigma$  de  $S$  est parcouru dans le sens direct, dans lequel on laisse à sa droite l'intérieur de  $S$ .

Calculons alors les seconds membres des formules (1). Des équations semi-polaires de la courbe, nous déduisons les équations cartésiennes

$$x = R \cos^2 \theta, \quad y = R \cos \theta \sin \theta, \quad z = R \sin \theta.$$

De plus, on remarquera que l'intégration le long du quart de cercle  $TA$  donne un résultat nul car alors on a toujours  $y = 0$ .

Dans ces conditions, les formules (1) deviennent

$$U_x - U_y = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{5} R^3,$$

$$U_y - U_z = -2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^3 \theta \, d\theta = -\frac{4}{15} R^3,$$

$$U_z - U_x = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{15} R^3.$$

ces intégrales se calculant d'une manière absolument immédiate en posant  $u = \cos \theta$ .

Remarquons que la somme des trois seconds membres est nulle conformément à la remarque terminant le n° 3.

Or on sait maintenant, par un calcul classique

maintes fois effectué, que

$$U_z = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3.$$

Alors on a immédiatement

$$U_y = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{22}{45} \right) R^3, \quad U_x = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{13}{45} \right) R^3.$$

Un lecteur qui comparerait ces formules avec celles du Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* (n° 3) remarquerait que les significations de  $U_x$  et  $U_y$  ont été échangées. Ceci tient simplement à ce que la figure n'est pas supposée construite de la même manière.

§. *Seconde application des formules* (1). — La définition donnée au paragraphe précédent pour la courbe de Viviani peut être généralisée en supposant que l'angle MOP est égal à  $n$  fois l'angle POx. On trouvera quelques mots d'histoire à ce sujet dans le *Recueil d'Exercices* de F. Frenet, 5<sup>e</sup> édition (Problèmes 296, 303, 310).

Prenons simplement  $n = 2$ . La nouvelle courbe aura pour équations semi-polaires

$$r = R \cos 2\theta, \quad z = R \sin 2\theta.$$

La première de ces équations représente la projection de la courbe sur  $Oxy$ ; c'est la rosace à quatre feuilles engendrée par la projection de O sur un segment, de longueur constante  $2R$ , qui glisse sur deux droites rectangulaires passant par O et bissectrices des axes  $Oxy$ . Une des feuilles a  $Ox$  pour diamètre et la moitié de son périmètre est complètement parcourue, de A en O, quand  $\theta$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{4}$ . La cloison sphérique que je me propose de considérer se projette sur cette demi-

feuille. Calculons les seconds membres des formules (1).

On a d'abord pour la courbe les équations cartésiennes

$$x = R \cos 2\theta \cos \theta, \quad y = R \cos 2\theta \sin \theta, \quad z = R \sin 2\theta.$$

Là encore les intégrations le long du cercle TA donnent un résultat nul et les seconds membres (1) sont

$$\begin{aligned} & 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2\theta \cos \theta \sin \theta \, d\theta, \\ & - R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \sin 2\theta \sin \theta (\cos 2\theta \sin \theta + 2 \sin 2\theta \cos \theta) \, d\theta, \\ & R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \sin 2\theta \cos \theta (\cos 2\theta \cos \theta - 2 \sin 2\theta \sin \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Si l'on pose  $2\theta = \tau$ , ces intégrales deviennent respectivement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \tau \sin \tau \, d\tau, \\ & - \frac{1}{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \tau \left( \frac{1}{2} \cos \tau - \frac{3}{2} \cos^2 \tau + 1 \right) \sin \tau \, d\tau, \\ & \frac{1}{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \tau \left( \frac{1}{2} \cos \tau + \frac{3}{2} \cos^2 \tau - 1 \right) \sin \tau \, d\tau. \end{aligned}$$

Si maintenant on pose  $\cos \tau = u$  elles deviennent

$$\begin{aligned} U_x - U_y &= \frac{1}{2} R^3 \int_0^1 u^3 \, du = \frac{1}{8} R^3, \\ U_y - U_z &= -\frac{1}{2} R^3 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} u^2 - \frac{3}{2} u^3 + u \right) du = -\frac{7}{48} R^3, \\ U_z - U_x &= \frac{1}{2} R^3 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} u^2 - \frac{3}{2} u^3 - u \right) du = \frac{1}{48} R^3. \end{aligned}$$

La somme de ces trois expressions est bien nulle.

Nous sommes donc en mesure maintenant de connaître  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  dès que nous connaîtrons une seule de ces trois quantités. Or, un calcul classique donne

$$U_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos 2\theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr = R^3 \left( \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9} \right),$$

d'où, en vertu des formules précédentes,

$$U_x = R^3 \left( \frac{\pi}{12} - \frac{19}{144} \right), \quad U_y = R^3 \left( \frac{\pi}{12} - \frac{37}{144} \right).$$

Entre les plans passant par  $Oz$  et d'azimut  $0$  et  $\frac{\pi}{4}$  existe, au-dessus de  $Oxy$ , un demi-onglet sphérique dont le volume est précisément  $\frac{\pi}{12} R^3$ . L'excès du volume de ce demi-onglet sur les trois volumes  $U$  est rationnel. C'est un résultat bien classique quand il s'agit de  $U_z$  mais qui semble moins remarqué pour les deux autres volumes.

6. *Troisième application des formules (1).* — Considérons maintenant la courbe sphérique qui se projette sur  $Oxy$  suivant une lemniscate de Bernoulli ayant son point double en  $O$  et l'un de ses sommets au point  $A$  où la sphère coupe  $Ox$ .

Cette courbe sphérique aura pour équations semi-polaires

$$r^2 = R^2 \cos 2\theta, \quad z = \sqrt{2} R \sin \theta,$$

ou pour équations cartésiennes

$$x = R \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, \quad y = R \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta, \quad z = \sqrt{2} R \sin \theta.$$

La cloison sphérique que nous considérons se projette sur la demi-boucle de lemniscate située dans l'angle  $Oxy$ . Calculons encore les volumes  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$

( 269 )

attachés à ladite cloison. Le contour d'intégration comprend toujours un arc TA donnant un résultat nul et les seconds membres de (1) sont

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta, \\ & - \sqrt{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3\theta \sin^2 \theta \, d\theta, \\ & \sqrt{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3\theta \cos \theta \sin \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Si l'on pose  $\cos \theta = u$ , ces intégrales deviennent

$$U_x - U_y = \sqrt{2} R^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^2 (2u^2 - 1) \, du = \frac{1 + \sqrt{2}}{15} R^3,$$

$$U_y - U_z = \sqrt{2} R^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (u^2 - 1)(4u^2 - 1) \, du = -\frac{11 - 4\sqrt{2}}{30} R^3,$$

$$U_z - U_x = \sqrt{2} R^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^2 (4u^2 - 3) \, du = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{10} R^3.$$

Leur somme est bien nulle.

Reste à calculer l'un des trois volumes  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$ . Or un calcul facile donne

$$U_z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{R\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{R^2 - r^2} r \, dr = R^3 \left( \frac{\pi}{12} - \frac{4\sqrt{2} - 7}{9} \right);$$

d'où, en vertu des formules précédentes,

$$U_x = R^3 \left( \frac{\pi}{12} - \frac{22\sqrt{2} - 23}{90} \right), \quad U_y = R^3 \left( \frac{\pi}{12} - \frac{28\sqrt{2} - 17}{90} \right).$$

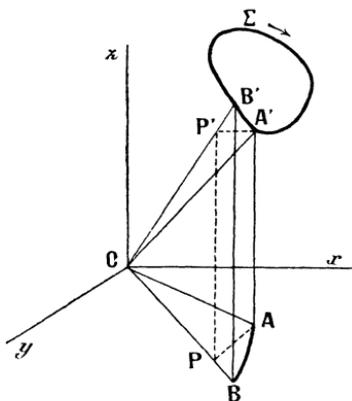
Ces volumes sont contenus dans le même demi-

onglet que celui considéré à la fin du paragraphe précédent. L'excès de ce demi-onglet sur chacun d'eux ne contient que  $\sqrt{2}$  comme irrationalité numérique.

7. *Volumes cylindro-coniques.* — Soit toujours le contour  $\Sigma$  par lequel passe la cloison  $S$ . Nous continuerons à supposer, pour plus de simplicité, que l'axe  $Oz$  ne traverse pas  $S$ .

Si nous joignons tous les points de  $S$  et de  $\Sigma$  à l'origine nous formons un volume conique  $V_0$  de sommet  $O$ . D'après le raisonnement général du paragraphe 2, la différence  $U_z - V_0$  ne dépend que du contour  $\Sigma$ , ce qu'on peut voir directement sur la figure 2. Soit

Fig. 2.



$A'B'$  un arc infiniment petit de  $\Sigma$ , arc se projetant en  $AB$  sur  $Oxy$ . On conçoit immédiatement que l'élément de volume  $OABB'A'O$  est celui de  $U_z - V_0$ . D'autre part, si  $AP$  est un arc de cercle de centre  $O$ , cet élément de volume peut être remplacé par  $OAPP'A'O$ . Ce dernier élément est une pyramide dont

la base APP'A a pour aire  $z r d\theta$  et dont la hauteur est  $OA = r$ . Le volume de cette pyramide est donc

$\frac{1}{3} z r^2 d\theta$  et l'on a finalement

$$(2) \quad U_z - V_0 = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} z r^2 d\theta.$$

8. *Volumes et aires sphériques.* — Dans mon Mémoire *Sur les applications de la formule de Stokes*, j'ai appliqué la formule (2) à divers objets. Ici je n'en retiens qu'un.

Si le contour  $\Sigma$  est sur une sphère de centre O et de rayon R et si la cloison S est la portion de surface sphérique contenue dans  $\Sigma$ , S ayant alors une aire  $\sigma$ , on a  $R\sigma = 3V_0$  et la formule (2), devenant

$$(3) \quad 3U_z - R\sigma = \int_{\Sigma} z r^2 d\theta.$$

donne le moyen, le volume  $U_z$  étant connu, d'avoir  $\sigma$  par une simple intégrale de ligne. Et réciproquement.

9. *Première application de la formule (3).* — Reprenons les données géométriques du paragraphe 4 et notamment la même cloison S dont nous chercherons l'aire  $\sigma$ . La formule (3) donne

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) R^3 - R\sigma = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta,$$

d'où, sans peine,

$$\sigma = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Cette aire retranchée de celle du huitième de la sphère donne  $R^2$  pour excès, ce qui est le théorème bien connu dû à Viviani.

10. *Seconde application de la formule (3).* — Reprenons les données géométriques du paragraphe 5. Cette fois la formule (3) donne

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) R^3 - R\sigma = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos^2 2\theta \, d\theta,$$

car il y a toujours, comme au paragraphe précédent d'ailleurs, un quart de cercle TA le long duquel on a  $\theta = 0$  et qui, par suite, donne une valeur nulle dans l'intégration. Pour  $2\theta = \tau$  la formule précédente devient

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) R^2 - \sigma = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \tau \cos^2 \tau \, d\tau,$$

et l'intégrale définie qu'il faut calculer est la même que celle du paragraphe précédent. Elle a pour valeur  $\frac{1}{3}$ , d'où finalement

$$\sigma = R^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

Cette aire est comprise dans un demi-fuseau sphérique dont l'angle au sommet est  $\frac{\pi}{4}$  et dont l'aire est  $\frac{\pi}{4} R^2$ . L'excès de l'aire du demi-fuseau sur l'aire  $\sigma$  est  $\frac{1}{2} R^2$ . Le résultat est encore bien connu, mais la méthode employée ici pour y parvenir paraît l'être beaucoup moins.

11. *Troisième application de la formule (3).* — Reprenons les données géométriques du paragraphe 6. Alors la formule (3) donne

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right) R^3 - R\sigma = \sqrt{2} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos 2\theta \, d\theta.$$

Posant  $\cos \theta = u$ , il vient

$$\left( \frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \right) R^2 - \sigma = \sqrt{2} R^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2u^2 - 1) du,$$

et enfin

$$\sigma = R^2 \left[ \frac{\pi}{4} - (\sqrt{2} - 1) \right].$$

Cette aire, retranchée du demi-fuseau considéré au paragraphe précédent, donne pour excès  $R^2(\sqrt{2} - 1)$ , ce qui, comme tous les volumes considérés au paragraphe 6, ne contient qu'une irrationalité quadratique.

Avant d'abandonner les cloisons sphériques remarquons qu'à propos des trois cloisons qui ont été considérées nous avons calculé les volumes  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  et l'aire  $\sigma$ .

Les méthodes classiques verraient là quatre intégrales doubles, ce qui a été remplacé ici par un seul calcul d'intégrale double et trois calculs d'intégrales simples étendues à un contour  $\Sigma$ . Le bénéfice paraît indéniable.

**12. Volumes conoïdaux.** — De tous les points de la cloison  $S$  et de son contour  $\Sigma$  abaissons des perpendiculaires sur une droite fixe que nous prendrons, par exemple, pour axe  $Oy$ .

Nous pouvons définir ainsi un volume conoïdal  $W_y$ . Considérons en même temps les volumes cylindriques  $U_x$  et  $U_z$ . Si nous coupons le tout par un plan normal à  $Oy$ , le solide conoïdal donne une section en forme de triangle et les solides cylindriques deux sections en forme de trapèze. De plus, on voit sans peine que le double de l'aire triangulaire égale la somme des aires trapézoïdales. Une telle égalité, multipliée par  $dy$ ,

donne une égalité entre éléments de volume et l'on conclut par intégration

$$2W_y = U_x + U_z.$$

13. *Volumes bicylindriques et aires correspondantes.* — Dans mon Mémoire, *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes*, j'ai étudié plusieurs conséquences de la formule précédente. Ici je n'en retiens qu'une. Supposons que la cloison S appartienne à un cylindre *circulaire*  $\Gamma$  de rayon R et d'axe Oy et que l'aire de cette cloison soit  $\sigma$ . Alors

$$2W_y = R\sigma,$$

et comme, d'autre part,

$$U_z - U_x = \int_{\Sigma} zx \, dy,$$

ou a

$$(4) \quad 2U_z - R\sigma = \int_{\Sigma} zx \, dy,$$

formule comparable à (3). Ce sont les volumes  $U_z$  que j'appelle *bicylindriques* pour rappeler qu'ils sont limités, vers le haut, par une cloison S qui appartient à un cylindre (circulaire) et, latéralement, par un cylindre dont la base dans Oxy peut être une courbe fermée quelconque. On voit que ces volumes  $U_z$  et l'aire  $\sigma$  correspondante sont liés par une simple intégrale de ligne.

14. *Application de la formule (4).* — Coupons le cylindre  $\Gamma$  par un cylindre absolument identique mais d'axe Oz. Le noyau commun aux deux solides nous donne, dans le trièdre Oxyz, un volume

$$U_z = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3.$$

La courbe d'intersection des deux cylindres est une ellipse d'équations

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = R \sin \theta,$$

si bien que la formule (4) donne immédiatement  $\sigma = R^2$ .

Dans le *Recueil d'Exercices* de F. Frenet on trouve des calculs de  $U_z$  et de  $\sigma$  au moyen d'intégrales doubles (5<sup>e</sup> édition, Problèmes 501 et 509).

15. *Contours tels que*  $U_z = U_x = W_y$ . — D'après la dernière des formules (1), on voit que ces contours  $\Sigma$  sont ceux qu'on peut tracer sur une surface

$$(5) \quad zx = f(y),$$

la fonction  $f$  étant quelconque et le contour  $\Sigma$  étant simplement choisi de manière à éviter des difficultés singulières relatives à  $f$ .

Mais des applications bien simples et des plus élégantes s'obtiennent, sans qu'on ait à s'inquiéter de telles difficultés, en prenant, pour  $f(y)$ , un simple polynome.

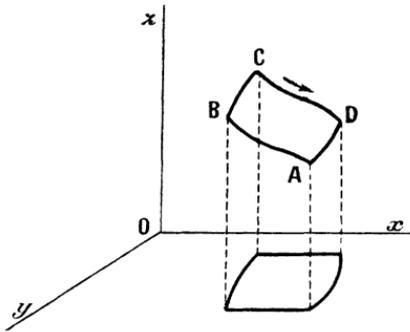
Dans mon Mémoire, *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* (n<sup>o</sup> 4), je suis déjà revenu sur les surfaces (5). Voici d'abord une première remarque non faite à l'endroit cité.

Supposons que l'on coupe une des surfaces (5) et le contour  $\Sigma$  y tracé par deux plans *parallèles* à  $Ozx$ . Sur la figure 3, AB et CD sont les fragments de courbe plane obtenus dans la surface (5) par les plans sécants. BC et DA sont les fragments du contour  $\Sigma$  compris entre ces plans.

Je dis que l'intégralè de  $zx \, dy$  est nulle non seulement le long de  $\Sigma$  mais aussi le long du contour mixte ABCDA. En effet,  $f(y) \, dy$  prend des valeurs égales

et de signes contraires de B en C, puis de D en A; ces deux portions du contour d'intégration donnent donc

Fig. 3.



au total un résultat nul. Et quant aux portions AB et CD elles donnent, chacune pour leur compte, un résultat nul parce que, le long de ces portions,  $y$  est constant et, par suite,  $dy$  nul.

D'après la formule qui termine le paragraphe 12, on voit que les cloisons, pour lesquelles on a  $U_z = U_x$ , donnent aussi  $W_y = U_z$ .

Si le contour  $\Sigma$  se trouve sur le cylindre circulaire  $\Gamma$  défini au paragraphe 13, l'égalité  $W_y = U_z$  s'écrit aussi  $R\sigma = 2U_z$ .

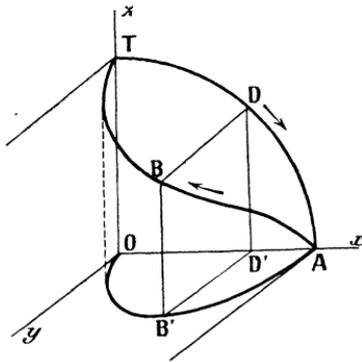
16. *Contours cylindriques pour lesquels  $R\sigma = 2U_z$ .* — Cherchons un exemple de tels contours, ce que l'on peut présenter comme une seconde application de la formule (4).

Pour rendre nul le second membre de (4), nous avons le choix entre toutes les surfaces (5). Je prendrai simplement  $f(y) = ky$ ; d'où, pour  $\Sigma$ , la courbe

$$x^2 + z^2 = R^2, \quad zx = ky$$

intersection du cylindre  $\Gamma$  avec un paraboloid hyperbolique qui admet pour génératrices  $Oz$  et la droite, non tracée sur la figure 4, qui passe par A, parallèlement à  $Oyz$ , avec une pente  $\frac{k}{R}$ ; toutes les génératrices de l'autre système étant parallèles à  $Oxy$ , on se représente facilement la quadrique en question.

Fig. 4.



Mais il est peut être encore plus simple d'éliminer  $z$  entre les équations précédentes et d'observer que l'intersection étudiée a, sur  $Oxy$ , une projection d'équation

$$k^2 y^2 = x^2 (R^2 - x^2).$$

C'est là un huit <sup>(1)</sup> dont le point double est en O et

---

<sup>(1)</sup> Cette courbe se rencontre dans de nombreuses projections d'intersections de quadriques, ce qui a été particulièrement mis en lumière dans les excellents *Exercices de Géométrie descriptive* de F. G.-M. (4<sup>e</sup> édition, 1909, p. 399, 694, 730, 780 et *passim*). C'est évidemment la courbe  $R^2 y^2 = x^2 (R^2 - x^2)$ , dont les ordonnées sont affectées d'un facteur constant et, quant à cette dernière, on paraît la désigner de plus en plus sous le nom de *lemniscate de Gerono* proposé par F. G.-M. (*loc. cit.*, p. 399). Cette dénomi-

dont la figure 4 représente le quart en  $AB'O$ . Le contour  $\Sigma$  sera  $ABTDA$ . On voit que dans ce contour on fait intervenir non pas toute l'intersection du paraboloïde et du cylindre mais seulement l'arc  $ABT$  qu'on ferme par le quart de cercle  $TDA$ , ce qui est permis d'après la remarque faite au paragraphe précédent.

On a directement

$$U_z = \int_0^R \frac{R'}{B'D'} \cdot \overline{DD'} dx = \int_0^R \frac{x}{k} (R^2 - x^2) dx = \frac{R^3}{4k},$$

ce qui est aussi  $W_y$ . Alors

$$\sigma = \frac{R^3}{2k}.$$

17. *Contours tels que  $U_z = V_0$ .* — La formule (2) qui peut s'écrire

$$U_z - V_0 = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} z(x dy - y dx) = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} zx^2 d\left(\frac{y}{x}\right),$$

nous montre immédiatement que de tels contours sont situés sur les surfaces

$$(6) \quad zx^2 = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

parmi lesquelles on peut particulièrement remarquer

$$zx^2 = k^3, \quad xyz = k^3, \quad z(x^2 + y^2) = k^3.$$

Mais on peut placer tout de suite ici une remarque

nation est reproduite en effet dans les *Notes de bibliographie des courbes géométriques* de M. H. Brocard, ouvrage qui semble avoir été le prototype de tous les ouvrages encyclopédiques publiés ensuite sur les courbes remarquables (*Voir*, par exemple, G. LORIA, *Ebene Kurven*, p. 174). On peut la retrouver également sans sortir des *Nouvelles Annales* (PHILBERT DU PLESSIS, 1904, p. 261). Je l'emploie couramment dans mon cours de Mathématiques générales de Faculté des Sciences de Toulouse.

analogue à celle déjà faite au paragraphe 15. Un contour  $\Sigma$  étant tracé sur une surface (6), on pourra en déduire une sorte de quadrilatère limitant une cloison pour laquelle on aura aussi  $U_z = V_0$ . Nous obtiendrons ce quadrilatère ABCD en coupant  $\Sigma$  par un plan passant par  $Oz$  et d'argument fixe  $\theta_1$ , ce qui donnera deux points d'intersection A et B, puis par un autre plan analogue d'argument  $\theta_2 < \theta_1$ , ce qui donnera deux autres points C et D. On parcourt ABCDA dans le sens direct. De B en C, puis de D en A, les éléments en  $d\theta$  se détruisent; de A en B ou de C en D,  $\theta$  est constant et, par suite,  $d\theta$  nul.

Quand de tels contours sont tracés sur la sphère de centre O et de rayon R et qu'ils enferment une aire sphérique  $\sigma$  on a, comme on l'a déjà remarqué au paragraphe 8,

$$3V_0 = R\sigma;$$

d'où

$$3U_z = R\sigma,$$

ce qu'on aurait pu écrire immédiatement d'après (3).

18. *Remarque générale.* — Considérons l'intégrale curviligne

$$(7) \quad \int P dx + Q dy + R dz$$

étendue à un contour fermé  $\Sigma$  et cela sans faire aucune hypothèse sur le problème qui en entraîne la considération.

L'expression différentielle  $P dx + Q dy + R dz$  peut toujours être ramenée à la forme

$$dx + \beta d\gamma,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant trois fonctions de  $x, y, z$  à déterminer.

(Voir, par exemple, P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 2<sup>e</sup> édition, t. III, p. 453. — G. DARBOUX, *Comptes rendus*, 15 et 22 novembre 1909.)

Dans ces conditions l'intégrale précédente prend la forme

$$(8) \quad \int \beta \, d\gamma,$$

car l'intégrale de  $dx$  est nulle le long d'un contour fermé, sauf singularités que nous nous arrangerons à laisser de côté par un choix convenable de  $\Sigma$ .

Construisons maintenant des surfaces  $\beta = f(\gamma)$ ,  $f$  étant une fonction arbitraire.

En général, on pourra toujours tracer, sur ces surfaces, une infinité de contours non singuliers pour lesquels l'intégrale (8) et, par suite, l'intégrale (7) seront nulles. L'assertion est évidente puisqu'il n'y aura à considérer, en dernière analyse, que l'intégrale de  $f(\gamma) \, d\gamma$ , c'est-à-dire d'une différentielle exacte, le long d'un contour fermé.

De plus, en partant d'un de ces contours  $\Sigma$ , on pourra toujours en déduire des contours de forme quadrilatérale possédant la même propriété. Pour cela on coupera ce contour  $\Sigma$  et la surface  $\beta = f(\gamma)$  qui le porte, par les deux surfaces

$$\gamma = C_1, \quad \gamma = C_2,$$

$C_1$  et  $C_2$  étant des constantes différentes. On obtiendra ainsi un quadrilatère ABCDA, où AB et CD sont les intersections de  $\beta = f(\gamma)$  par les deux surfaces précédentes cependant que BC et DA sont des arcs de  $\Sigma$  compris entre ces mêmes surfaces. Le long de AB et de CD on aura  $d\gamma = 0$ ; le long de BC, les éléments  $f(\gamma) \, d\gamma$  auront des valeurs correspondant à la variation

de  $\gamma$  de  $C_1$  à  $C_2$  tandis que sur DA on retrouvera les mêmes éléments alors que  $\gamma$  varie de  $C_2$  à  $C_1$ .

On voit que ces considérations générales donnent, comme cas particuliers, les remarques faites aux paragraphes 15 et 17.