NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1911). Composition de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 231-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__231_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1911).

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Soient* Δ *une droite donnée,* O *un point fixe sur cette droite.*

Déterminer les surfaces S *telles que la trace du plan tangent en un point quelconque* M, *sur le plan* ΔOM, *coupe le rayon vecteur* OM *suivant un angle donné* α.

La recherche des surfaces S *se ramène à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles* E; *indiquer comment on peut engendrer les*

([1]) Les propriétés exposées dans les paragraphes 11, 12, etc., sont des cas particuliers, exposés élémentairement, de propriétés plus générales signalées dans une Note *Sur les intégrales linéaires des équations de Lagrange*, présentée à l'Académie des Sciences (3 juillet 1911) et qui seront développées ultérieurement dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure*.

surfaces S *à l'aide d'une caractéristique choisie de cette équation.*

II. *Les surfaces* Σ *qui coupent les rayons vecteurs issus d'un point donné* O *sous un angle donné sont les intégrales d'une équation* F *aux dérivées partielles du premier ordre.*

1° *L'équation* F *admet-elle des surfaces* S *comme solutions particulières?*

2° *Déterminer les surfaces* Σ.

Comment une surface Σ *peut-elle être engendrée à l'aide d'une caractéristique choisie, par seul déplacement du plan de cette courbe? Quelles sont ses lignes de courbure?*

3° *Une surface* Σ *déterminée peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe de surfaces* S *ou* Σ *particulières.*

On peut toujours choisir la famille d'enveloppées de telle sorte qu'en tout point de contact l'enveloppe et l'enveloppée aient mêmes centres de courbure principaux.

4° *Toute surface* Σ *peut être obtenue comme intégrale commune à l'équation* F *et à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre dont l'origine est analogue à celle de l'équation* E.

Solution par M. C. Clapier.

I. Supposons que OΔ soit la verticale du point O, pris comme origine des coordonnées. Déterminons le point M par son rayon vecteur OM $= r$, sa cote z et sa distance à l'axe Δ, $\rho = \sqrt{x^2 e y^2}$.

Le plan tangent au point M d'une surface S passe par une droite déterminée MT située dans le plan ΔOM et faisant avec OM un angle donné α. Il en résulte que les surfaces S doivent satisfaire à une équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire.

Pour obtenir cette équation, désignons par T le point de rencontre du plan avec Δ, l'axe des z et posons

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Si M_1 est la projection de M sur l'axe Δ, nous aurons

$$M_1T = -px - qy$$

et, si l'on désigne par θ la latitude du point M,

$$\widehat{M_1MT} = \pi - \alpha - \theta;$$

il en résulte

$$px + qy = \rho \operatorname{tang}(\alpha + \theta).$$

Substituons $\operatorname{tang}\theta = \frac{z}{\rho}$, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles E,

$$(1)\qquad px + qy = \rho\,\frac{\rho + kz}{\rho k - z}, \qquad k = \cot\alpha.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\rho\,\frac{\rho + kz}{\rho k - z}}.$$

On déduit une première intégrale,

$$(2)\qquad y = x \operatorname{tang}\varphi,$$

et une combinaison intégrale

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\rho^2} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dz}{\rho\,\frac{\rho + kz}{\rho k - z}};$$

par suite

$$\rho\,d\rho + z\,dz = k(\rho\,dz - z\,d\rho),$$

$$d\log(\rho^2 + z^2) = 2k\,d \operatorname{arctang}\frac{z}{\rho};$$

$$(3)\qquad r = ce^{k\theta}.$$

Comme il était facile de le prévoir *a priori*, le lieu du point M dans le plan MOΔ déterminé par l'angle φ, est une spirale logarithmique de pôle O et coupée sous l'angle α par le rayon vecteur.

L'équation (3) représente une infinité de pareilles courbes, qui peuvent se déduire de l'une d'elles soit par homothétie, soit par une rotation autour du pôle.

Les surfaces S sont déterminées par la congruence des courbes (2) et (3) qui contiennent les constantes arbitraires φ et c.

Une surface S sera engendrée par une des logarithmiques précédentes dont le plan tourne autour de l'axe Δ, pendant qu'elle-même est animée d'un mouvement de rotation autour de son pôle.

Si l'on suppose c constant nous avons les surfaces S' engendrées par la révolution des logarithmiques autour d'un axe Δ de leur plan. Leur équation est

$$r = ce^{k \arccos \frac{\rho}{r}}. \tag{4}$$

II. Une surface Σ' est telle qu'en un point M le plan tangent touche le cône de révolution engendré par MT tournant autour du rayon vecteur OM. Elle doit donc vérifier une équation aux dérivées partielles F.

Pour former celle-ci nous prendrons trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques passant par O et nous substituerons la variable r à z, de manière à poser

$$dr = p\,dx + q\,dy.$$

Avec ce changement de variables, nous aurons

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = \frac{r(px+qy) - r^2}{z},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{r^2(1+p^2+q^2) - 2r(px+qy)}{z^2}.$$

Et, si nous exprimons que le rayon vecteur coupe la surface Σ sous l'angle α, nous obtenons l'équation F,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & r\sin^2\alpha[r(1+p^2+q^2)-2(px+qy)] \\ & \qquad\qquad -(px+qy-r)^2=0. \end{aligned} \right.$$

Elle est de la forme

$$F(px+qy, z, p, q)$$

et les équations de Cauchy nous donnent

$$(6)\qquad \frac{dp}{p}=\frac{dq}{q};\qquad \frac{p}{p_0}=\frac{q}{q_0}=\frac{1}{s}.$$

Cette intégrale nous permettra d'intégrer par la méthode de Lagrange.

L'équation

$$dr-p\,dx-q\,dy=0,$$

ou bien

$$s\,dr-dt=0,\qquad t=p_0x+q_0y,$$

pourra être intégrée. Il suffit de calculer s à l'aide de (5); on trouve

$$s=\frac{t}{r}+\frac{\sqrt{r^2(p_0^2 e q_0^2)-t^2}}{r\cot\alpha}.$$

Nous prenons le signe $+$ devant le radical et nous substituons cette valeur dans l'équation

$$s\,dr-dt=0;$$

il vient

$$(r\,dt-t\,dr)\cot\alpha=\left[\sqrt{r^2(p_0^2 e q_0^2)-t^2}\right]dr.$$

$$\frac{dr}{r}=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{p_0^2+q_0^2-\frac{t^2}{r^2}}}\,d\frac{t}{r},$$

$$\log\frac{r}{c}=\cot\alpha\arc\cos\frac{t}{r}\,\frac{1}{\sqrt{p_0^2 e q_0^2}}.$$

Finalement nous obtenons l'intégrale complète

$$(7)\qquad r=ce^{k\,\mathrm{arc\,cos}\frac{p_0x+q_0y}{r\sqrt{p_0^2+q_0^2}}}$$

avec les deux constantes arbitraires, c et $\frac{q_0}{p_0} = \operatorname{tang} \mu$.

Les surfaces (7) représentent des surfaces de révolution dont l'axe est dans le plan des xy. Pour obtenir la méridienne, coupons par ce plan $z = 0$; nous obtenons

$$\rho = ce^{k(\varphi - \mu)},$$

équation qui représente une spirale logarithmique L, de pôle O et d'angle $V = \alpha$.

Le plan des xy étant quelconque, on voit qu'une intégrale complète est engendrée par une spirale logarithmique L prise dans un plan quelconque fixe π passant par l'origine et tournant autour de l'un de ses rayons vecteurs. Elle dépend de deux paramètres : la direction de l'axe dans le plan π et la constante c de laquelle dépend L.

Si l'on choisit pour axe la droite OΔ, donnée dans la première partie (I) : 1° on voit que les surfaces S' sont des solutions particulières de l'équation F; ce sont des intégrales complètes.

2° Pour obtenir l'intégrale générale, il suffit de prendre l'enveloppe des intégrales complètes déterminées par l'équation (7).

Les surfaces Σ sont engendrées par les courbes du complexe des caractéristiques associées suivant une certaine loi. Ces courbes ont pour équation

$$(8) \quad \begin{cases} v = r - ce^{k \arccos \frac{x\cos\mu + y\sin\mu}{r}} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial c} + b\,\dfrac{\partial v}{\partial \mu} = 0. \end{cases}$$

Elles dépendent des paramètres c, b et μ.

La deuxième équation (8) s'écrit

$$-1 + bk \frac{x \sin\mu - y\cos\mu}{\sqrt{r^2 - (x\cos\mu + y\sin\mu)^2}} = 0,$$

ou bien

$$(x \sin\mu - y\cos\mu)^2 + z^2 = b^2k^2(x\sin\mu - y\cos\mu)^2,$$

$$(9) \qquad x\sin\mu - y\cos\mu = \gamma z, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{b^2k^2 - 1}}.$$

Cette dernière équation (9) est l'équation d'un plan qui contient la courbe de contact de la surface (7) avec son enveloppe. Il passe par l'axe de cette surface de révolution $v = 0$; donc les caractéristiques sont les méridiennes des intégrales complètes.

Ce sont des logarithmiques L tracées dans des plans passant par l'origine; elles dépendent bien de trois paramètres : la direction de leur plan π et l'orientation dans ce plan fixée par la constante c.

Si l'on suppose c donné, le plan (9) enveloppe un cône de révolution. La surface Σ correspondante est engendrée par une logarithmique déterminée dont le plan π roule sur un cône fixe. Il est clair que la génératrice est ligne de courbure et que les trajectoires de ses points forment l'autre système de lignes de courbure.

Si l'on prend $c = \text{fonct}(\mu)$, le plan (9) enveloppe un cône quelconque Γ. Une surface Σ quelconque sera engendrée par une caractéristique choisie L_0, dont le plan π roule sur le cône Γ pendant qu'elle-même subit une rotation autour de O dans son plan. La caractéristique reste ligne de courbure pour la surface Σ; le deuxième système des lignes de courbure est formé par leurs trajectoires orthogonales : ce sont des courbes sphériques.

3° La surface Σ est l'enveloppe d'une famille d'intégrales complètes ayant leurs axes dans le plan des xy. Or on peut remplacer une de ces surfaces intégrales par une nouvelle intégrale complète ayant son axe dans le plan tangent au cône Γ mené par l'axe de la première.

De sorte que Σ peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe d'intégrales complètes.

En particulier, si l'on prend la famille d'enveloppées dont les axes décrivent le cône Γ, il est clair que l'enveloppe et l'enveloppée auront mêmes centres de courbure principaux.

Le cône Γ constitue l'une des nappes de la surface des centres; l'autre nappe est engendrée par la développée de la logarithmique génératrice; cette courbe est elle-même une logarithmique.

4° Une surface Σ déterminée est engendrée par une logarithmique L_0 qui coupe son rayon vecteur suivant l'angle α. Elle est donc telle que son plan tangent coupe le plan de sa caractéristique suivant une droite déterminée MT. Cette condition exprime que Σ satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire.

Pour l'obtenir, écrivons l'équation du plan de la caractéristique sous la forme (9), où γ est une fonction donnée de μ, $\gamma = f(\mu)$; MT a pour coefficients directeurs

$$qf + \cos\mu, \quad -pf + \sin\mu, \quad p\cos\mu + q\sin\mu$$

et nous avons en posant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$\cos\alpha = \frac{(qf + \cos\mu)x + (-pf + \sin\mu)y + (p\cos\mu + q\sin\mu)z}{r\sqrt{(qf + \cos\mu)^2 + (pf - \sin\mu)^2 + (p\cos\mu + q\sin\mu)^2}}$$

qu'on peut écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &[f(qx - py) + rf' + zP]^2 \\ &\quad = r^2\cos^2\alpha[f^2(p^2 + q^2) + 2fP' + 1 + P^2] \end{aligned} \right.$$

$$x\sin\mu - y\cos\mu = zf, \qquad P = p\cos\mu + q\sin\mu;$$

$$x\cos\mu + y\sin\mu = zf', \qquad P' = -p\sin\mu + q\cos\mu.$$

Si nous faisons dans cette équation $f=0$, ce qui revient à supposer que le plan de la caractéristique passe par l'axe des z, nous devons retrouver l'équation (1).

On trouve en effet

$$x\cos\mu+y\sin\mu=\rho,$$
$$(\rho+2P)^2-\frac{k^2r^2}{1+k^2}(1+P^2)=0,$$

équation du deuxième degré en P, d'où l'on déduit

$$(11)\qquad P=\frac{\rho\pm kz}{-z\pm k\rho},\qquad x=\rho\cos\mu,\qquad y=\rho\sin\mu,$$

où les signes se correspondent. En prenant le signe $+$ on a l'équation (1) qui correspond à l'angle α formé par le rayon vecteur OM avec la tangente dirigée MT; le signe $-$ correspondrait à l'angle $\pi-\alpha$ et donnerait les mêmes caractéristiques L dont l'équation dans leur plan est $r=ce^{k\omega}$, $R=\cot V$.

Changer le signe de k revient à prendre la symétrique de L par rapport au rayon vecteur origine.

L'équation (10) nous donnera de même deux équations aux dérivées partielles linéaires; l'une d'elles correspondant à $k=\cot\alpha$ répondra à la question. Développons cette équation en remarquant qu'on a

$$qx-py=(Pf+P'f')z$$
$$p^2+q^2=P^2+P'^2;$$

il vient

$$z^2[f(fP+f'P')+P+f']^2$$
$$=r^2\cos^2\alpha[f^2(P^2+P'^2)+2fP'+1+P^2],$$

qu'on peut écrire

$$(12)\qquad \begin{cases} z^2[(1+f^2)P+f'(1+fP')]^2 \\ \quad =r^2\cos^2\alpha[(1+f^2)P^2+(1+fP')^2]. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$1+f^2=m, \qquad 1+fP'=Q,$$

nous avons une équation homogène du deuxième degré en (P, Q).

Développant et résolvant par rapport à $\frac{P}{Q}$, on trouve

$$\frac{P}{Q}=\frac{-mf'z^2 \pm r\cos\alpha\sqrt{m^2z^2-mr^2\cos^2\alpha+mf'^2z^2}}{m^2z^2-m\cos^2\alpha\, r^2}.$$

En tenant compte de la relation

$$1+f^2+f'^2=\frac{r^2}{z^2},$$

on aura finalement l'équation linéaire cherchée

$$(13) \qquad m\frac{P}{Q}=\frac{-mf'z^2 \pm \sqrt{m}\cos\alpha\sin\alpha\, r^2}{mz^2-r^2\cos^2\alpha},$$

$$P=p\cos\mu+q\sin\mu,$$
$$Q=f(-p\sin\mu+q\cos\mu)+1,$$

dans laquelle μ doit être envisagé comme constant. Cette équation doit en effet admettre l'intégrale

$$x\sin\mu-y\cos\mu=f(\mu),$$

f fonction donnée et définissant le cône enveloppé par le plan de la caractéristique.

Cette équation (13) comporte le double signe, comme il fallait s'y attendre, et cela pour les mêmes raisons que l'équation (11). Pour lever l'ambiguïté, il suffira de choisir ce signe, de manière à retrouver l'équation (1) lorsqu'on fait dans (13)

$$f=0, \qquad m=1, \qquad f'=\frac{\rho}{z}.$$

On est ainsi amené, par raison de continuité, à prendre le signe —.