NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

Sur les intégrales des quantités de mouvement

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 213-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__213_0>

[R8a]

SUR LES INTÉGRALES DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

---

1. Les intégrales premières, autres que celle des forces vives, que l'on rencontre constamment dans les problèmes de dynamique sont celles qui sont fournies par les théorèmes classiques des projections ou des moments des quantités de mouvement et il faut y ajouter l'intégrale très fréquemment fournie par les équations d'Euler dans le cas des solides de révolution.

Je me propose de montrer qu'en utilisant la notion de vitesse d'un système de vecteurs, on peut définir une catégorie générale d'intégrales premières linéaires dont toutes celles que nous venons de signaler ne sont que des cas particuliers et dont nous donnerons l'expression générale au moyen de la force vive.

2. Considérons un système matériel dont la quantité de mouvement est le système Q de vecteurs, Q' étant la vitesse de Q.

Soit, d'autre part, S un système variable de vecteurs choisi arbitrairement, et S' sa vitesse.

On a la formule

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S, Q) = \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S', Q) + \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S, Q'). \tag{1}$$

Mais nous avons la propriété cinématique, exprimée par l'égalité géométrique

$$(\mathfrak{J}) + (Q') = 0,$$

et la propriété dynamique, exprimée par l'égalité géométrique

$$(\mathfrak{J}) + (\mathfrak{F}_{d,l}) = 0,$$

$\mathfrak{J}$ étant le système des forces d'inertie et $\mathfrak{F}_{d,l}$ le système des forces données et de liaison. On en déduit

$$(2) \qquad (Q') = (\mathfrak{F}_{d,l}),$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (1) sous la forme

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S, Q) = \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S', Q) + \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S, \mathfrak{F}_{d,l}).$$

La formule (2) constitue ce que nous appellerons le *théorème général des quantités de mouvement* et la formule (3) ce que nous appellerons le *théorème général des moments des quantités de mouvement.*

3. Si l'on applique au système Q la construction indiquée de sa vitesse au moyen de la réduction en un point fixe, on retrouve immédiatement, en vertu de la formule (2), la représentation géométrique classique des théorèmes sur les quantités de mouvement.

Si l'on applique la formule (3) à un *couple fixe*, la vitesse S' est nulle et les moments se réduisent aux projections sur une droite fixe de sorte qu'on retrouve le théorème des projections des quantités de mouvement.

Si l'on applique la même formule à un *vecteur fixe,* la vitesse S' est encore nulle et l'on retrouve le théorème ordinaire des moments des quantités de mouvement.

4. Si *la condition dynamique*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S, \mathfrak{F}_{d,l}) = 0$$

et *la condition cinématique*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S', Q) = 0$$

sont à chaque instant réalisées simultanément, l'égalité (3) devient

$$\frac{d}{dt} M^t(S, Q) = 0$$

et donne l'intégrale première

$$M^t(S, Q) = \text{const.}, \tag{4}$$

que, sous cette forme générale, nous appellerons *intégrale des quantités de mouvement.*

5. En distinguant les forces de liaison des forces données, la condition dynamique peut s'écrire

$$M^t(S, \mathcal{F}_d) + M^t(S, \mathcal{F}_l) = 0,$$

elle doit avoir lieu à priori sans connaître le mouvement réellement pris par le système, c'est-à-dire sans connaître les forces de liaison, comme conséquence de la nature du système $\mathcal{F}_d$, et de la seule chose que l'on connaisse sur $\mathcal{F}_l$, à savoir que son travail est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons en supposant, ce que nous ferons toujours, que les liaisons ont lieu sans frottement.

La condition se décompose donc en deux autres :

La première

$$M^t(S, \mathcal{F}_d) = 0$$

ne donne lieu à aucune remarque, elle est ou n'est pas vérifiée suivant la nature de S et des forces données;

Pour que la seconde soit vérifiée, il faut que l'égalité

$$M^t(S, \mathcal{F}_l) = 0$$

soit une conséquence de

$$\text{Travail virtuel de } \mathcal{F}_l = 0,$$

ce qui exige que ce travail virtuel puisse s'exprimer sous forme de moment. Ce fait ne se présente à priori que dans le déplacement d'un solide ou plus généralement dans un *déplacement d'ensemble d'un système matériel*. Ce déplacement, qui a les mêmes propriétés que les vitesses d'un point d'un solide, pourra se représenter par

$$S\varepsilon,$$

S étant un système de vecteurs dépendant de la position du système et ε un facteur infiniment petit qui doit être considéré comme une variable indépendante. Pour ce déplacement virtuel d'ensemble que nous supposons constamment compatible avec les liaisons, on aura

$$\mathfrak{E}(\mathcal{F}_l) = \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S\varepsilon, \mathcal{F}_l) = \varepsilon \mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S, \mathcal{F}_l) = 0;$$

donc :

Pour que la condition dynamique soit remplie par les forces de liaison il faut et il suffit que $S\varepsilon$ *soit constamment un déplacement virtuel d'ensemble compatible avec les liaisons.*

6. La condition cinématique

$$\mathrm{M}^{\mathrm{t}}(S', Q) = 0$$

doit être remplie à priori, c'est-à-dire quel que soit le mouvement compatible avec les liaisons. On peut trouver des cas très généraux où il en est ainsi :

1° S *est un système fixe.*

La condition est bien réalisée car S' est un système nul.

2° S *est un système invariable entraîné par la translation du centre de gravité.*

Réduisons simultanément S et Q au centre de gravité, ce qui donne R, G et ρ', γ ; R et G sont invariables en grandeur et direction et subissent la translation $\frac{\rho}{M}$ du centre de gravité (M masse totale). Dans cette translation, le couple G reste équipollent à lui-même et ne donne rien pour S′ qui se réduit à la vitesse du vecteur R c'est-à-dire à un couple G′ perpendiculaire au plan R, ρ. On a alors

$$M^t(S . Q) = M^t(G', \rho) + M^t(G', \gamma),$$

le premier terme est nul comme moment d'un couple et d'un vecteur orthogonaux et le second comme moment de deux couples de sorte que la condition cinématique est bien réalisée.

3° *Le système matériel est un solide ayant un point fixe et* S *est un vecteur attaché au solide sur un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie du point fixe.*

Réduisons simultanément S et Q au point fixe O, ce qui donne R et ρ, γ. Soient Oz l'axe de révolution et $O\omega$ la vitesse du solide. Les expressions bien connues des composantes de γ sur les axes de l'ellipsoïde montrent que γ est dans le plan $zO\omega$. La vitesse S est ici celle du vecteur R attaché au solide sur Oz, dont l'origine O est fixe et qui subit la rotation ω; elle se réduit à un vecteur R′ perpendiculaire au plan R, ω, c'est-à-dire au plan $zO\omega$ qui contient γ.

On a

$$M^t(S', Q) = M^t(R', \rho) + M^t(R', \gamma);$$

le premier terme est nul comme moment de deux vecteurs concourants et le second comme moment d'un vecteur et d'un couple orthogonaux, de sorte que la condition cinématique est bien réalisée.

4° *Le système matériel est un solide et* S *est un vecteur attaché à ce solide sur un axe de révolution de son ellipsoïde central d'inertie.*

Faisons la réduction de Q au centre de gravité G, nous obtiendrons un vecteur ρ et un couple γ. Si nous faisons la réduction analogue de la vitesse du solide, nous aurons la rotation ω et la translation $\frac{\rho}{M}$ et nous verrons encore que γ est dans le plan $z\mathrm{G}, \omega$ $\mathrm{G}z$ étant l'axe de révolution.

La vitesse du vecteur R attaché au solide sur $\mathrm{G}z$ se compose d'un vecteur R' perpendiculaire au plan R, ρ donc perpendiculaire à ρ.

Dans l'expression

$$\mathrm{M}^t(\mathrm{S}, \mathrm{Q}) = \mathrm{M}^t(\mathrm{R}', \rho) + \mathrm{M}^t(\mathrm{R}', \gamma) + \mathrm{M}^t(\mathrm{G}', \rho) + \mathrm{M}^t(\mathrm{G}', \gamma),$$

le premier terme est nul comme moment de deux vecteurs concourants, le quatrième comme moment de deux couples et les deux autres comme moments d'un vecteur et d'un couple orthogonaux, de sorte que la condition cinématique est toujours réalisée.

7. Un déplacement virtuel infiniment petit d'un système matériel est défini par un système d'accroissements δq des paramètres q qui définissent sa position. Si l'on multiplie tous les δq par une même quantité, on obtient un déplacement virtuel qui n'est pas distinct du premier. On peut dire que ce déplacement est défini par

$$\frac{\delta q_1}{\lambda_1} = \frac{\delta q_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\delta q_n}{\lambda_n} = \varepsilon,$$

les λ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui contiennent implicitement un facteur indéterminé $\theta(q_1, \ldots, q_n)$ et ε étant une variable indépendante infiniment petite.

Supposons que ce déplacement virtuel soit un déplacement d'ensemble et considérons les déplacements δx, δy, δz des points du système, ils possèdent la propriété fondamentale des moments; si, dans ces expressions des δx, δy, δz, on supprime le facteur ε, on remplace le déplacement de chaque point par un vecteur fini et ces vecteurs possèdent aussi la propriété des moments, donc sont les moments d'un certain système S et les déplacements des points sont les moments de $S\varepsilon$.

Ce système S est défini à un facteur θ près. La condition dynamique, étant relative à S, contient θ en facteur, donc est ou n'est pas réalisée sans avoir à préciser la valeur de ce facteur, Il n'en est pas de même de la condition cinématique car celle-ci est relative à S' qui varie avec θ. On a, en effet,

$$(S\theta)' = S\frac{d\theta}{dt} + \theta S',$$

donc

$$M^t[(S\theta)', Q] = \frac{d\theta}{dt}M^t(S, Q) + \theta M^t(S', Q).$$

Si le moment est nul pour S', il ne le sera pas en général pour $(S\theta)'$.

Nous voyons ainsi que le facteur θ se trouve déterminé par la condition cinématique.

8. Supposons donc que le déplacement virtuel d'ensemble $S\varepsilon$ satisfaisant aux conditions dynamique et cinématique soit défini par

$$\delta q_1 = \lambda_1 \varepsilon, \quad \ldots, \quad \delta q_n = \lambda_n \varepsilon,$$

les λ étant des fonctions bien déterminées de q et de t.

L'intégrale des moments correspondante pourra s'écrire

$$\frac{1}{\varepsilon}M^t(S\varepsilon, Q) = \text{const.}$$

Le moment qui y figure est le travail du système Q de vecteurs dans le déplacement d'ensemble $S\varepsilon$; c'est donc la quantité

$$\sum m(x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z)$$

étendue à tout le système matériel. En raisonnant comme pour l'établissement des équations de Lagrange, on l'écrit sous les formes successives

$$\sum \delta q \left[\sum m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q}\right)\right],$$
$$\sum \delta q \left[\sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'}\right)\right],$$
$$\sum \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} \delta q,$$

ou enfin

$$\varepsilon \sum \lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'},$$

de sorte que l'expression analytique de l'intégrale des quantités de mouvement est

$$\sum \lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} = \text{const.}$$

9. Cette forme analytique donne l'explication du fait bien connu que, la plupart du temps, les intégrales de quantités de mouvement ou les intégrales d'Euler qu'on aperçoit à priori sont données analytiquement et d'une façon immédiate par les équations de Lagrange comme conséquence de ce qu'un des paramètres ne figure pas dans le travail virtuel et ne figure que par sa dérivée dans la force vive.

Cela provient de ce que le déplacement virtuel d'ensemble correspondant est relatif à la variation d'un seul paramètre, q_1 par exemple, et a pour équations

$$\delta q_1 = \varepsilon, \qquad \delta q_2 = \ldots = \delta q_n = 0,$$

de sorte qu'on a

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

et que l'intégrale des quantités de mouvement a la forme simple

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} = \text{const.}$$

Considérons alors l'équation de Lagrange relative à q_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1;$$

Q_1 est le travail de $\mathcal{F}_d$ dans le déplacement $S\varepsilon$, il est nul en vertu de la condition dynamique ; d'autre part, quelle que soit la solution choisie, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = 0;$$

il en résulte

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0,$$

qui, devant avoir lieu pour toute solution, c'est-à-dire quels que soient les q et les q', montre que q_1 ne figure pas dans T. L'équation de Lagrange relative à q_1 se réduisait donc d'elle-même à la forme simple

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = 0$$

et donnait bien l'intégrale considérée des quantités de mouvement comme intégrale immédiate.

10. A un point de vue tout élémentaire et pratique, une intégrale des quantités de mouvement n'est visible à priori sans aucun calcul que si la condition dynamique est réalisée par suite de la disposition des forces données sans se préoccuper de leurs intensités et ce fait, qui existe toujours pour les forces données *intérieures*, ne peut se produire pour des forces données *extérieures* que si S est un couple auquel toutes les formes sont orthogonales ou si S est un vecteur rencontré par toutes les forces. Si d'ailleurs S, représentant un déplacement d'ensemble, ne vérifie pas complètement les conditions caractéristiques des cinq catégories du paragraphe 6, mais si sa ligne d'action quand S est un

vecteur, ou sa direction quand c'est un couple, vérifie ces conditions, l'intensité seule de S contient le facteur θ qui peut ainsi être déterminé de façon qu'elle soit constante. Il suffit donc, pour l'existence de l'intégrale, de faire ces hypothèses plus simples, de sorte que, au point de vue pratique, nous avons cinq catégories d'intégrales :

1° Le système admet dans chaque position une translation virtuelle d'ensemble suivant une direction fixe à laquelle toutes les forces données extérieures sont orthogonales.

C'est l'intégrale classique du centre de gravité. Nous l'appelons *intégrale de translation.*

2° Le système admet, dans chaque position, une rotation virtuelle d'ensemble autour d'une droite fixe rencontrée par toutes les forces données extérieures.

C'est l'intégrale classique des aires. Nous l'appelons *intégrale de rotation.*

3° Le système admet, dans chaque position, une rotation virtuelle d'ensemble autour d'une droite subissant la translation du centre de gravité et rencontrée par toutes les forces données extérieures.

Nous dirons qu'on a alors une intégrale de rotation de seconde espèce.

Ces intégrales nouvelles, auxquelles conduit tout naturellement la théorie générale développée précédemment, sont classiques dans le cas très particulier où l'axe de la rotation virtuelle d'ensemble passe par le centre de gravité. Mais elle se présente très fréquemment sous sa forme générale ; c'est, par exemple, ce qui arrive dans le mouvement d'une sphère homogène pesante pouvant librement rouler et pivoter sans glisser sur un plan incliné fixe : on a l'intégrale de rotation de seconde espèce pour la ligne de plus grande pente menée par le point de contact de la sphère.

4° Le système est un solide ayant un point fixe pour lequel l'ellipsoïde d'inertie possède un axe de révolution Δ. Le solide possède une rotation virtuelle autour de cet axe Δ qui est rencontré par toutes les forces données.

C'est l'intégrale classique d'Euler qui exprime que la composante sur Δ de la rotation ω est constante.

5° Le système est un solide dont l'ellipsoïde central d'inertie possède un axe de révolution Δ. Le solide possède une rotation virtuelle autour de cet axe Δ qui est rencontré par toutes les forces données.

C'est encore l'intégrale classique d'Euler qui exprime que la composante de la rotation ω sur l'axe Δ est constante.

Pour abréger, nous désignerons ces cinq catégories par les lettres T, R, R', E, E'.

11. L'importance considérable des intégrales de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = \text{const.},$$

fournies par les équations de Lagrange quand certains paramètres n'y figurent pas par eux-mêmes, provient de ce que ces intégrales permettent l'élimination immédiate des paramètres correspondants, ce qui constitue une réduction du problème qui peut même donner l'intégration complète par quadratures, quand on a l'intégrale des forces vives et $n - 1$ telles intégrales immédiates.

On est alors amené à se poser la question suivante :

Un problème de dynamique possède un groupe d'intégrales de quantités de mouvement des catégories T, R, R', E, E'; *est-il possible de choisir les paramètres de façon que ces intégrales se présentent* *toutes simultanément sous la forme immédiate*

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = \text{const.?}$$

Si le groupe d'intégrales possède cette propriété, nous conviendrons, pour abréger, de dire que c'est un *groupe normal*. Supposons qu'il en soit ainsi.

Chaque intégrale du groupe sera défini par un déplacement virtuel dans lequel les λ seront tous nuls sauf un qui sera égal à l'unité, c'est-à-dire dont tous les δq seront nuls sauf un égal à ε. A chacune d'elles correspondra ainsi un paramètre q. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ces paramètres.

Quels que soient les q, si l'on donne à l'un quelconque des paramètres $q_1, \ldots, q_r$ un accroissement infiniment petit, le déplacement du système est un déplacement d'ensemble, c'est-à-dire pour lequel la variation δl de la distance de deux molécules quelconques est nulle, de sorte que l est indépendant de $q_1, \ldots, q_r$ et les paramètres se décomposeront en deux groupes; $q_{r+1}, \ldots, q_n$ seront les paramètres de forme et $q_1, \ldots, q_r$ les paramètres de position. Si, ayant fixé les paramètres de forme, on fait varier d'une façon quelconque les paramètres de position, on a un solide à r paramètres et la vitesse paramétrique V_i de ce solide, c'est-à-dire sa vitesse quand on fait varier seulement le paramètre q_i considéré comme étant le temps, est précisément le système S_i de l'intégrale correspondant à ce paramètre. Donc :

Pour que des intégrales de quantités de mouvement d'un même problème de dynamique forment un groupe normal, il faut que les systèmes S *correspondants puissent être considérés comme les vitesses paramétriques d'un même solide.*

Comme un solide dépend au plus de six paramètres, on voit qu'un groupe normal d'intégrales de quantités de mouvement contient, au maximum, six intégrales.

12. Considérons un point dépendant de deux paramètres u, v et supposons que ses vitesses paramétriques soient les moments de deux systèmes fixes de vecteurs U et V que nous supposerons être simplement des vecteurs ou des couples. U et V peuvent évidemment être deux couples fixes : c'est le cas du point dans un plan, u, v étant ses coordonnées cartésiennes.

Supposons que U soit un vecteur fixe que nous prendrons pour Oz. Les coordonnées de U et V seront

U...........	o	o	ω	o	o	o
V...........	p	q	r	ξ	η	ζ

toutes ces quantités étant des constantes. En exprimant de deux façons les vitesses paramétriques du point, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\omega y, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \xi + qz - ry,$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \omega x, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \eta + rx - pz,$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \zeta + py - qx,$$

et en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$, celles de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$ et celles de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$,

$$\begin{aligned} \omega p z &= \omega\eta, \\ \omega q z &= -\omega\xi, \\ 0 &= \omega p x + \omega q y. \end{aligned}$$

Si le point ne décrit pas un plan parallèle à xOy, z est variable et les deux premières exigent

$$p = q = \xi = \eta = 0.$$

Si, au contraire, z décrit un plan parallèle à xOy, x et y sont des variables indépendantes puisque le point dépend effectivement de deux paramètres et la troisième montre que p et q sont nuls, ce qui entraîne ξ, η nuls d'après les deux premières. On a donc toujours la même conclusion.

Si $r = 0$, V est un couple parallèle au vecteur U.

Si r n'est pas nul, V n'est pas un couple et nous devons seulement examiner si V peut être un vecteur; la relation quadratique fondamentale se réduit à

$$r\zeta = 0$$

et donne $\zeta = 0$, de sorte que V aurait même ligne d'action, Oz, que U. En faisant varier u ou en faisant varier v, on aurait les mêmes déplacements; donc le point ne dépendrait, en réalité, que d'un seul paramètre.

Il n'y a donc que deux hypothèses à faire :

Ou bien U et V sont deux couples fixes;

Ou bien U et V sont un vecteur et un couple qui sont fixes et parallèles.

13. Considérons maintenant un solide à deux paramètres u, v dont les vitesses paramètres seront les deux systèmes U et V de vecteurs, systèmes qui seront supposés réductibles, soit à un couple, soit à un vecteur unique. Les vitesses paramétriques d'un point quelconque du solide sont les moments de U et V; donc on peut appliquer le résultat du paragraphe précédent, de sorte que si U et V sont fixes, ces deux systèmes sont deux couples ou bien un vecteur et un couple parallèles.

Supposons que U et V soient deux vecteurs subissant la translation du centre de gravité. Considérons le trièdre T attaché au solide et le trièdre T' parallèle à T mais ayant une origine fixe; il dépendra des deux paramètres u, v et ses vitesses paramétriques U′, V′ sont deux rotations équipollentes à U et V. U′ et V′ sont alors deux vecteurs fixes qui, d'après ce qui a été trouvé au paragraphe précédent, ont forcément même direction de sorte que U et V sont parallèles.

Si U et V sont un vecteur fixe et un vecteur entraîné par la translation du centre de gravité, la démonstration précédente s'applique encore, U et V sont parallèles. Prenons pour Oz le vecteur fixe U et considérons les deux vitesses paramétrique du centre de gravité (a, b, O); la seconde est forcément constante en grandeur et direction; on a donc

$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\omega b, \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = c,$$
$$\frac{\partial b}{\partial v} = \omega a, \qquad \frac{\partial b}{\partial v} = c';$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$c = c' = 0.$$

La seconde vitesse paramétrique du centre de gravité étant nulle, c'est qu'il se trouve sur V. Ainsi : si U est un vecteur fixe et V un vecteur subissant la translation du centre de gravité, U et V sont parallèles et V passe par le centre de gravité.

Supposons enfin que U et V soient deux vecteurs concourants attachés au solide, le même raisonnement prouverait leur parallélisme; donc U et V auraient même ligne d'action et le solide ne dépendrait que d'un paramètre. Il y a donc impossibilité.

14. Les propriétés précédentes vont nous permettre de préciser la composition d'un groupe normal d'intégrales T, R, R′, E, E′; mais auparavant, il est nécessaire

de faire une remarque dans le cas où il y a deux intégrales R′ parallèles. Soient ρ et ρ_1 les deux vecteurs parallèles unitaires et de sens contraires portés sur les deux axes entraînés par le centre de gravité. Les deux intégrales sont

$$M^t(\rho, Q) = \text{const.}, \qquad M^t(\rho_1, Q) = \text{const.};$$

elles peuvent se remplacer par deux combinaisons linéaires quelconques à coefficients constants et, en particulier, par

$$M^t(\rho, Q) = \text{const.}, \qquad M^t(\rho, Q) + M^t(\rho_1, Q) = \text{const.}$$

Or la seconde peut s'écrire

$$M^t[(\rho, \rho_1), Q] = \text{const.}$$

et comme ρ, ρ_1 forment un système invariable subissant la translation du centre de gravité et que ρ et ρ_1 sont égaux, parallèles et de sens contraires, l'ensemble $\rho\,\rho_1$ est un couple subissant une translation, c'est-à-dire un couple fixe, de sorte que deux intégrales R, R′ parallèles peuvent se remplacer par l'une d'elles et par une intégrale T perpendiculaire. En tenant compte de ce fait et supposant toujours cette réduction réalisée, on peut dire, comme conséquence immédiate du paragraphe précédent :

Un groupe normal ne contient jamais plus d'une intégrale de chacune des catégories R, R′, E, E′ *et contient au plus trois intégrales* T.

Si le groupe contient une intégrale R, *il contient au plus une intégrale* T *qui doit être parallèle à* R *et, s'il contient une intégrale* R′, R′ *doit aussi être parallèle à* R.

Si un groupe normal contient une intégrale R, il peut contenir au plus une intégrale T, une intégrale R′ et une intégrale E ou E′ ; il est donc, au plus, d'ordre 4.

S'il ne contient pas d'intégrale R, il contient au plus une intégrale R′, une intégrale E ou E′ et trois intégrales T, de sorte qu'il est au maximum d'ordre 5 ; donc *l'ordre maximum d'un groupe normal d'intégrales* T, R, R′, E, E′ *est cinq*.

On peut distinguer des cas précis :

1° Le système n'a pas de point fixe et, si c'est un solide, son ellipsoïde central n'est pas de révolution.

On n'a pas d'intégrales d'Euler, de sorte qu'on ne peut avoir que des groupes normaux d'ordre maximum 4, s'il n'y a pas d'intégrale R, et d'ordre maximum 3, s'il y a une intégrale R.

2° Le système a un point fixe et, s'il est solide, l'ellipsoïde d'inertie de ce point n'est pas de révolution.

Il n'y a pas d'intégrale d'Euler ; les déplacements d'ensemble ne peuvent être que des rotations autour d'axes passant par le point fixe ; donc il est impossible d'avoir des intégrales T et R′. Un groupe normal ne pourra être composé que d'une seule intégrale R ; le problème peut comporter deux ou trois intégrales de cette nature autour du point fixe, chacune d'elles forme à elle seule un groupe normal, mais leur ensemble ne forme jamais un tel groupe.

3° Le système est un solide dont l'ellipsoïde central est de révolution.

On peut alors avoir des intégrales de toutes les catégories ; c'est le seul cas où l'on puisse trouver parfois un groupe normal de l'ordre maximum cinq.

4° Le système est un solide ayant un point fixe pour lequel l'ellipsoïde d'inertie est de révolution.

D'après ce qui a été dit dans le second cas, il n'y a pas d'intégrales T et R′ et un groupe normal se composera au plus d'une intégrale R et d'une intégrale E.

5° Le système se réduit à un point matériel. Les intégrales R′ et E′ n'ont pas de sens; il ne peut y avoir que des intégrales T et R.

Un groupe normal sera composé uniquement d'intégrales T et sera au maximum d'ordre 3 ou sera composé d'une intégrale R et, au plus, d'une intégrale T parallèle à R, il sera au maximum d'ordre 2.

15. Ce qui précède montre pourquoi des problèmes qui paraissent extrêmement voisins, possédant tous deux l'intégrale des forces vives et un même nombre d'intégrales de quantités de mouvement, sont, en réalité, tout à fait dissemblables au point de vue de l'intégration. Cela tient à ce que, pour l'un, les intégrales des quantités de mouvement forment un groupe normal tandis que, pour l'autre, l'ensemble de ces intégrales ne peut former un tel groupe, de sorte qu'à ce point de vue le fait d'en avoir plusieurs n'a aucune importance; il ne pourra être utilisé qu'au moyen d'artifices particuliers au problème considéré.

Comme exemple, il suffit de citer les deux cas classiques de Lagrange et d'Euler pour le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

La connaissance à priori d'un groupe normal d'intégrales de quantités de mouvement sert pour la réduction et l'intégration des équations à condition que les paramètres soient choisis de façon que toutes les intégrales du groupe soient simultanément sous forme immédiate. Il en résulte que cette recherche des intégrales de quantités de mouvement doit se faire au début du problème, avant même de choisir les paramètres, puisque ce sont les résultats qu'elle donnera qui guideront le choix de ces paramètres.

On commencera par choisir comme on voudra les paramètres de forme du système matériel. On sera alors ramené à un solide dont on connaîtra à priori des translations ou rotations paramétriques. A chaque translation on fera correspondre, comme paramètre, le déplacement fini d'un point du système, estimé suivant cette direction; à chaque rotation on fera correspondre l'angle de rotation, et, de cette façon, on aura bien des paramètres tels que chaque déplacement relatif à une intégrale du groupe soit déterminé par des λ tous nuls, sauf un égal à l'unité et toutes ces intégrales se présenteront sous forme immédiate ([1]).