G. VALIRON

Expression asymptotique de certaines fonctions entières

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[D4b]

EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. G. VALIRON.

L'étude des produits canoniques d'ordre fini dont la distribution de zéros est simple a été faite par un grand nombre d'auteurs [1]; mais les cas plus généraux ne me semblent avoir été abordés que par M. Lindelöf [2] et ar M. Leau [3]. Les résultats de M. Leau comprennent ceux de M. Lindelöf comme cas particulier; mais ils laissent échapper certains cas de distribution très régulière, c'est ainsi qu'ils ne s'appliquent pas au cas où la relation entre le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro, et n est

$$\log r_n = \rho \log n + K(\log_2 n)^\alpha, \qquad \alpha > 1, \qquad K > 0.$$

Je me propose ici d'obtenir la même approximation

(1) Parmi lesquels MM. Wiman, Barnes, Mattson, Littlewood.

(2) *Voir* LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, n° 1).

(3) *Étude sur les fonctions entières orientées* (*Annales de l'École Normale*, 1906, p. 33).

que M. Leau, en faisant sur la distribution une hypothèse qui me semble plus souple, et par une méthode de calcul plus directe.

1. *Hypothèses et notations.* — Je considère un produit canonique dont je supposerai tout d'abord que *tous les zéros ont le même argument*, par un changement de variable, je puis supposer cet argument égal à π. Je suppose également que *l'ordre* ρ *n'est pas entier;* le genre p est alors égal à la partie entière de ρ, et si r_n est le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, le produit s'écrit

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{-r_n}, p\right), \tag{1}$$

en posant

$$\mathrm{E}\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \left(1 + \frac{z}{r_n}\right) e^{-\frac{z}{r_n} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}}. \tag{2}$$

Ceci posé, je suppose que la relation qui lie r_n à n est la suivante

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}, \qquad n > \mathrm{N}; \tag{3}$$

la fonction $\alpha(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes que j'appelerai *conditions* A

$$\lim_{x=\infty} \alpha(x) = 0,$$
$$\lim_{x=\infty} x \log x \, \alpha'(x) = 0;$$

[pour chaque valeur de $x > \mathrm{N}$, la fonction $\alpha(x)$ a une dérivée à droite et une dérivée à gauche].

Nous nous proposons de chercher une valeur asymptotique à $(1 + \varepsilon)$ près [1] du produit $f(z)$, lorsque z

---

[1] Je désignerai par ε toute quantité positive, négative ou complexe, tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{n}$, ou $\frac{1}{n_0}$.

est extérieur à certains cercles entourant les zéros, nous poserons

$$B = \prod_{1}^{n_0-1} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right), \qquad C = \prod_{n_0}^{n'-1} E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right),$$

$$D = E\left(\frac{z}{-r_{n'}}, p\right) \times E\left(\frac{z}{-r_{n'+1}}, p\right), \qquad F = \prod_{n'+2}^{\infty} \left(\frac{z}{-r_n}, p\right);$$

le nombre n' étant défini par la double inégalité

$$r_{n'} \leqq r \leqq r_{n'+1},$$

r désignant le module de z.

2. *Calcul de* B. — Comme le produit B a un nombre fini de facteurs, on a

$$B = e^{Mz^p(1+\varepsilon)}.$$

M est la somme $\displaystyle\sum_{1}^{n_0-1} \frac{(-1)^p}{p r_n^p}$.

3. *Calcul de* C. — Nous pouvons écrire, pour $n < n'$,

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \frac{z}{r_n}\left(1 + \frac{r_n}{z}\right) e^{-\frac{z}{r_n} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}},$$

et puisque $\dfrac{r_n}{r} < 1$,

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = \frac{z}{r_n} e^{-\frac{z}{r_n} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{p r_n^p}} e^{\sum_{1}^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{r_n^q}{q z^q}}.$$

Par suite on a

$$C = G \times H,$$

en posant

$$G = \frac{z^{n'-n_0-1}}{r_{n_0} \ldots r_{n'-1}},$$

$$H = e^{-z\sum_{n_0}^{n'-1} \frac{1}{r_n} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{p} \sum_{n_0}^{n'-1} \frac{1}{r_n^p}} e^{\sum_{n=n_0}^{n=n'-1} \left[\sum_{1}^{\infty} (-1)^{q+1} \frac{r_n^q}{q z^q}\right]}.$$

le dernier exposant est la somme de $n' - n_0 - 1$ séries convergentes, en faisant la somme terme à terme, on peut écrire

$$\log H = \sum_{-p}^{+\infty}{}' \left[(-1)^{q+1} \frac{1}{q z^q} \sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q \right],$$

la somme Σ' ne comprenant pas le terme correspondant à $q = 0$.

Pour calculer $\log H$ nous sommes ramenés au calcul des sommes telles que

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q, \qquad (q = -p, -p-1, \ldots),$$

or, nous avons

$$(4) \qquad \sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = \int_{n_0}^{n'-\theta_q} x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} dx \qquad (0 < \theta_q < 1),$$

en tenant compte de l'égalité (3), et du fait que r_n croît (ou du moins ne décroît pas) avec n. Mais, par suite de la propriété de la fonction $\alpha(x)$ nous avons, en prenant n_0 assez grand,

$$\frac{d}{dx}\left[x . x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\right]$$
$$= \frac{q+\rho}{\rho}\left[1 + \frac{q}{\rho}\alpha(x) + \frac{q}{q+\rho} x \log x\, \alpha'(x)\right] x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}$$
$$= \frac{q+\rho}{\rho}(1+\varepsilon_q)\, x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}},$$

et par conséquent

$$x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho+q}(1+\varepsilon'_q)\frac{d}{dx}\left[x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} x\right],$$

en portant dans l'expression (4), nous obtenons, en supposant $\frac{n'}{n_0}$ suffisamment grand,

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = \frac{\rho}{\rho+q}(1+\varepsilon''_q)\left[x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}x\right]_{n_0}^{n'-\theta_q}$$

$$= (1+\varepsilon'''_q)\frac{\rho n'}{\rho-q}(n'-\theta_q)^{[1+\alpha(n-\theta_q)]\frac{q}{\rho}}.$$

Or, d'après la définition de r, nous avons

$$r = (n'-\theta)^{[1+\alpha(n+\theta)]\frac{1}{\rho}},$$

donc

$$(n'-\theta_q)^{[1+\alpha(n-\theta_q)]\frac{q}{\rho}} = r^q\left(1-\frac{2\theta_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}}(1+\varepsilon^{\text{IV}}_q) \qquad (0<\theta'_q<1);$$

et finalement nous avons

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q = (1+\varepsilon_q)\frac{\rho n'}{\rho+q}r^q\left(1-\frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}},$$

d'où, en posant

$$z = re^{i\varphi},$$

$$\log H = n'\sum_{-p}^{+\infty}{}'(-1)^{q+1}\frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)}(1+\varepsilon_q)\left(1-\frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}}.$$

Mais la série

$$\sum_{-p}^{+\infty}{}'(-1)^{q+1}\frac{\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)}$$

est absolument convergente, ainsi que celle figurant dans log H, en prenant n' assez grand, la différence entre les Q premiers termes correspondants des deux séries est arbitrairement petite, et par suite nous avons

$$\log H = (1+\varepsilon_1)n'\sum_{-p}^{+\infty}{}'\frac{(-1)^{q+1}\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)};$$

en prenant Q de façon que les restes soient négligeables ([1]).

Considérons maintenant $\log G$:

$$\log G = (n' - n_0 - 1)\log r - \sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n + (n' - n_0 - 1)i\varphi,$$

on a

$$\sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n = \int_{n_0}^{n'-\theta} \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x \, . \, dx \qquad (0 < \theta < 1);$$

or,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1)\right] = \frac{1+\alpha(x)}{\rho}\log x + \frac{\alpha'(x)\, x(\log x - 1)}{\rho},$$

et, d'après la propriété de la fonction $\alpha(x)$, le deuxième terme du second membre est arbitrairement petit, pourvu que n_0 soit assez grand, donc

$$\sum_{n_0}^{n'-1} \log r_n = \left[\frac{1+\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1)\right]_{n_0}^{n'-\theta} + \varepsilon(n' - n_0)$$
$$= n' \log r - k \log r - \frac{1+\varepsilon}{\rho} n',$$

en remarquant que $\log r - \log r_{n'}$ tend vers zéro et, comme enfin $\frac{\log r}{n'}$ tend vers zéro,

$$\log G = \frac{n'}{\rho}(1 + \varepsilon_2) + i\varphi\, n'(1 - \varepsilon_3).$$

En faisant la somme des expressions obtenues pour $\log H$ et $\log G$,

$$\log C = [1 + \varepsilon'(n', \varphi)]\, n' \left[\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{q=-p}^{q=+\infty}{}' \frac{(-1)^{q+1}\rho\, e^{-i\varphi q}}{q(\rho + q)}\right].$$

([1]) Cette détermination de Q est indépendante de n'.

4. *Calcul de* F. — Pour $n > n' + 1$, nous avons

$$E\left(\frac{z}{-r_n}, p\right) = e^{\sum\limits_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{z^q}{q r_n^q}},$$

d'où

$$\log F = \sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \left[\sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{z^q}{q r_n^q} \right].$$

Puisqu'il y a convergence absolue on peut intervertir l'ordre des sommations, et écrire

$$\log F = \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} \left[(-1)^{q+1} \frac{z^q}{q} \sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n q} \right],$$

le calcul des sommes

$$\sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} = \int_{n'+1+\theta_{1q}}^{+\infty} \frac{dx}{x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}} \qquad (0 < \theta_{1q} < 1)$$

se fait comme précédemment et nous obtenons

$$\sum_{n=n'+2}^{n=+\infty} \frac{1}{r_n^q} = \frac{\rho n'}{q-\rho}(1+\varepsilon_q) r^q \left(1 + \frac{2\theta'_{1q}}{n'}\right)^{-\frac{q}{\rho}} \qquad (0 < \theta'_{1q} < 1).$$

En portant dans l'expression de $\log F$, nous aurons

$$\log F = \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^{q+1} \frac{\rho e^{i\varphi q}}{q(q-\rho)} (1+\varepsilon_q) \left(1 + \frac{2\theta'_{1q}}{n'}\right)^{-\frac{q}{\rho}} n',$$

ou encore, par un raisonnement analogue à celui fait pour $\log H$,

$$\log F = [1 + \varepsilon''(n', \varphi)] n' \sum_{q=p+1}^{q=+\infty} (-1)^q \frac{\rho e^{i\varphi q}}{q(\rho - q)}.$$

5. *Calcul de* B.C.F. — En faisant la somme des

expressions obtenues pour $\log B$, $\log C$, $\log F$, nous avons, en remarquant que

$$\sum_{q=-p}^{q=+\infty}{}' \frac{(-1)^{q+1}\rho e^{-i\varphi q}}{q(\rho+q)} = \sum_{q=-\infty}^{q=p}{}' \frac{(-1)^{q}\rho e^{i\varphi q}}{q(\rho-q)},$$

et que $\frac{z^p}{n'}$ tend vers zéro,

$$\log BCF = [1+\varepsilon'''(n', \varphi)]\, n' \left[\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^{q}\rho e^{i\varphi q}}{q(\rho-q)}\right].$$

Entre crochets nous avons une fonction méromorphe de ρ, le dénominateur est $\sin\pi\rho$, puisque ses zéros sont $\rho = 0, \pm 1, \ldots, \pm q, \ldots$; le résidu relatif au pôle q est $(-1)^q e^{i\varphi q}$, le numérateur de la fonction méromorphe est donc une fonction $\Phi(\rho)$ telle que

$$\Phi(q) = (-1)^q e^{i\varphi q} \times \left(\frac{d}{d\rho}\sin\pi\rho\right)_{\rho=q},$$

ou

$$\Phi(q) = \pi e^{i\varphi q}.$$

Comme la fonction $\pi e^{i\varphi\rho}$ répond à la question, on a

$$\Phi(\rho) = e^{i\varphi\rho}\pi + \Psi(\rho)\sin\pi\rho,$$

$\Psi(\rho)$ étant une fonction entière.

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{\rho} + i\varphi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^{q}\rho e^{i\varphi q}}{q(\rho-q)} = \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin\pi\rho} + \Psi(\rho) \qquad (-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi);$$

et en tenant compte de la décomposition de la fonction méromorphe $\frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin\pi\rho}$ en fractions simples (1) on voit que

(1) *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 173, 174; et Lindelöf, *Calcul des résidus*, p. 38 et note de la page 32.

$\Psi(\rho) \equiv 0$. Nous aurons donc l'égalité

$$\log(\mathrm{BCF}) = [1 + \varepsilon''(\eta', \varphi)] \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin \pi\rho} n'.$$

6. *Calcul de* D. — Puisque $\frac{r_{n'+1}}{r_{n'}} = 1 + \varepsilon$ (comme on le voit immédiatement), on a

$$\log \mathrm{D} = \log\left(1 + \frac{z}{r_{n'}}\right)\left(1 + \frac{z}{r_{n'+1}}\right) + k, \qquad k \text{ fini.}$$

Excluons les zéros par des cercles ayant pour centre ces zéros et pour rayons r_n^{-a} $(a > 0)$, nous aurons à l'extérieur de ces cercles

$$|\log \mathrm{D}| < 2(a+1)\log r,$$

et comme $\frac{n'}{\log r}$ croît indéfiniment

$$|\log \mathrm{D}| = \varepsilon\,|\log(\mathrm{BCF})|.$$

Nous arrivons ainsi à l'égalité

$$(5) \quad \log f(z) = [1 + \varepsilon(n', \varphi)] \frac{\pi e^{i\varphi\rho}}{\sin \pi\rho} n' \qquad (-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi),$$

valable pour z suffisamment grand, et à l'extérieur de cercles décrits autour des zéros et de rayons inversement proportionnels aux modules des zéros ; n' est le nombre des zéros de module inférieur à $|z|$, $\varepsilon(n', \varphi)$ une fonction complexe de n' et φ, tendant vers zéro avec $\frac{1}{n'}$.

Si l'argument des zéros, au lieu d'être égal à π, est égal à ω, il suffira de remplacer, dans l'égalité (5), φ par $\varphi + \pi - \omega$ $(\omega - 2\pi \leqq \varphi \leqq \omega)$.

7. En supposant que les arguments des zéros, au lieu d'être tous égaux, *tendent vers une valeur* ω, l'égalité précédente a encore lieu. Supposons encore

$\omega = \pi$, nous devrons dans les calculs remplacer r_n par $r_n e^{i\omega_n}$, ω_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Prenons n_0 assez grand pour que

$$|\omega_n| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n > n_0,$$

ε étant donné.

Dans le calcul de C, on voit facilement que $\log G$ est multiplié par $1 + \eta$, η étant inférieur à $\rho\varepsilon$; d'autre part dans $\log H$, les sommes Σr_n^q sont remplacées par

$$\sum_{r_0}^{n-1} r_n^q e^{i\omega_n q},$$

Pour $q < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ on a

$$\sum_{n_0}^{n'-1} r_n^q e^{i\omega_n q} = (1 + \eta'_q) \sum_{n=n_0}^{n=n'-1} r_n^q \qquad (|\eta'_q| < \sqrt{\varepsilon});$$

la somme des Q premiers termes de $\log H$ est multipliée par $(1 + \eta'$, $|\eta'| < \sqrt{\varepsilon}$ $\left(\text{Q partie entière de } \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, le reste est inférieur en module à

$$\sum_{Q}^{+\infty} \left(\frac{1}{q r^q} \sum_{n=n_0}^{n=n'-1} r_n^q \right) = n' \sum_{Q}^{+\infty} \frac{q(\rho + q)}{\rho} (1 + \varepsilon_q) \left(1 - \frac{2\theta'_q}{n'}\right)^{\frac{q}{\rho}},$$

en prenant Q assez grand, c'est-à-dire ε assez petit, ce reste est négligeable $\left(\text{il est inférieur à } \eta' \frac{A}{Q}\right)$ En résumé $\log C$ est multiplié par $(1 + \eta'')$, $\eta'' < \sqrt{\varepsilon}$.

On constatera le même fait pour $\log F$ et, par suite, l'extension est établie.

De même, si le produit $f(z)$ est multiplié par $e^{P_p(z)}$, où $P_p(z)$ désigne un polygone de degré p, l'égalité (5) est encore valable.

8. *Fonctions* $f(z)+a$. — Les modules des zéros d'une fonction entière satisfaisant à la condition (A), et leurs arguments tendant vers une valeur déterminée ω, on a l'égalité asymptotique

$$(6)\qquad f(z)=e^{(1-\varepsilon)\frac{\pi e^{i\rho(\varphi+\pi-\omega)}}{\sin\pi\rho}n}\qquad (\omega-2\pi\leqq\varphi\leqq\omega),$$

où n est le nombre des zéros de module inférieur à $|z|$; on déduit de là des résultats relatifs aux zéros des fonctions

$$f(z)+a.$$

Supposons $\omega=\pi$, on voit immédiatement que les zéros des fonctions $f(z)+a$ forment des files dont les arguments ont pour limite possible les nombres

$$\pm\frac{\pi}{2\rho}+\frac{q\pi}{\rho}\quad\text{et}\quad\pi\qquad(q=0,\pm1,\ldots).$$

Cherchons le nombre des zéros de module inférieur à $r=|z|$ pour l'une des files $\pm\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi\rho}{\rho}$, comme $f(z)$ n'a pas de zéros en dehors de la direction π, ce nombre est égal à la différence des nombres des zéros des fonctions $f(z)$ et $f(z)+a$, c'est-à-dire à la variation d'argument de $1+\frac{a}{f(z)}$ lorsqu'on fait décrire au point z un contour formé de la façon suivante : les deux droites $\pm\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\rho\pi}{\rho}-\varepsilon$, $\pm\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\rho\pi}{\rho}+\varepsilon$, et deux arcs de cercle de rayon r_0 et r; l'expression de $f(z)$ montre que ce contour contient

$$n\frac{1}{2(\sin\pi\rho)}(1+\varepsilon)$$

zéros de $f(z)+a$.

Si $\rho>p+\frac{1}{2}$, il existe $2(p+1)$ files de zéros en dehors de la file possible d'arguments π; si $\rho\leqq p+\frac{1}{2}$

il y en a $2p$ seulement; on constatera de plus que, si $\rho > p + \frac{1}{2}$, il n'y a pas de zéros dont les arguments ont pour limite π; si $\rho \leqq p + \frac{1}{2}$ il y en a $n(1+\varepsilon)$. En résumé le rapport des nombres des zéros des fonctions $f(z)+a$ et $f(z)$ a pour limite $\frac{p+1}{|\sin \pi\rho|}$ si $\rho > p + \frac{1}{2}$; $\frac{p}{|\sin \pi\rho|} + 1$ si $\rho \leqq p + \frac{1}{2}$. Il importe de remarquer que ces limites ne sont pas atteintes *uniformément* quel que soit a, les zéros dont les arguments tendent vers des valeurs autres que π se présentent pour des modules d'autant plus grands que $|a|$ est plus petit.

L'étude de l'influence produite par les variations de a sur les zéros de $f(z)+a$ revient d'ailleurs à l'étude compliquée de la fonction inverse de la fonction $f(z)$.

9. *Exposant brut et exposant net de la suite des zéros d'une fonction entière.* — Pour justifier l'introduction des conditions (A) je vais démontrer la proposition suivante; étant donnée la suite

$$r, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

des modules des zéros d'une fonction entière d'ordre ρ; *on peut trouver des fonctions* $\alpha(x)$ *satisfaisant aux conditions* (A) *et telles qu'on ait*

$$r_n \geqq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}} \qquad (n > N),$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n.

Posons

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\rho \log r_n} - 1,$$

il résulte de la définition de ρ que la suite σ_n admet zéro pour limite supérieure pour n infini. Je vais construire une fonction $\beta(x)$ définie pour $x > r_N$, satisfaisant aux conditions (A) et telles que

$$\beta(r_n) \geqq \sigma_n,$$

quel que soit $n > N$;

$$\beta(r_n) = \sigma_n,$$

pour une infinité de valeurs de n.

Soit $\Theta(x)$ une fonction positive dérivable, satisfaisant à la deuxième condition (A) et croissante indéfiniment lorsque x croît [1]. A chaque valeur σ_n faisons correspondre la fonction $y_n(x)$ définie comme il suit :

1° Pour $x \leqq r_n$

$$y_n(x) = \theta(x) - \theta(r_n) + \sigma_n,$$

2° Pour $x \geqq r_n$

$$y_n(x) = -\theta(x) + \theta(r_n) + \sigma_n;$$

soient alors x_0 un nombre quelconque et p défini par les inégalités

$$r_p \leqq x_0 < r_{p+1}:$$

parmi les nombres $y_n(x_0)$, $n \leqq p$, il y en a un plus grand ou égal à tous les autres ; il en est de même pour $y_n(x_0)$ lorsque $n \geqq p+1$, car

$$y_n(x_0) - y_{p+1}(x_0) = \sigma_n - \sigma_{p+1} - \theta(r_n) + \theta(r_{p+1}),$$

et comme $\theta(x)$ croît indéfiniment, et que σ_n a pour limite supérieure zéro, cette différence est négative à partir d'une certaine valeur de n, il y a aussi un

---

[1] Une telle fonction est aisée à former, par exemple

$$\theta(x) = \log_3 x$$

nombre fini de nombres $y_n(x_0)$ supérieurs à $y_{p+1}(x_0)$, il y en a un plus grand que tous les autres.

Considérons alors la fonction $\gamma(x)$ qui pour chaque valeur de x est égale au plus grand des nombres $y_n(x)$, cette fonction coïncide successivement avec un certain nombre de fonctions $y_n(x)$ (de part et d'autre de $x = r_n$), elle satisfait donc déjà aux trois conditions

$$\lim_{r=\infty} \gamma'(x) x \log x = 0,$$

$$\gamma(r_n) \geqq \sigma_n,$$

quel que soit $n > \mathrm{N}$,

$$\gamma(r_n) = \sigma_n,$$

pour une infinité de valeurs de n.

Si elle tend vers zéro c'est une fonction $\beta(x)$ cherchée; sinon considérons une fonction $-\varepsilon(x)$ satisfaisant aux conditions (A), croissante et dérivable, la fonction égale pour chaque valeur de x au plus grand des deux nombres $\gamma(x)$ et $-\varepsilon(x)$ tend vers zéro : c'est une fonction $\beta(x)$ (¹).

Nous avons ainsi, à partir d'une certaine valeur de n,

$$n = r_n^{(1+\sigma_n)\rho} \leqq r_n^{\rho[1+\beta(r_n)]},$$

nous dirons que la suite $(1 + \sigma_n)\rho$ est l'*exposant brut* de la suite des zéros, la fonction $\rho[1 + \beta(x)]$ est l'*exposant net*. La fonction

$$x^{\rho[1+\beta(x)]}$$

est croissante, comme on le constate en employant les propriétés de la fonction $\beta(x)$: si nous écrivons la

(¹) Je suppose qu'une infinité de nombres $\sigma_n + \varepsilon(r_n)$ sont positifs, ce qui est facile à réaliser.

fonction inverse sous la forme

$$x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}}$$

nous aurons, à partir d'une certaine valeur de n,

$$r_n \geqq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

il reste à montrer que $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (A). Or nous avons

$$y = x^{\rho[1+\beta(x)]}, \qquad x = y^{\frac{1+\alpha(y)}{\rho}},$$

d'où

$$\log y = \rho[1-\beta(x)]\log x, \qquad [1+\beta(x)][1+\alpha(y)] = 1;$$

par suite, lorsque y croît indéfiniment, x aussi, $\beta(x)$ tend vers zéro et par conséquent aussi $\alpha(y)$; de plus, en dérivant les deux égalités précédentes, on obtient

$$\beta'(x)[1+\alpha(y)] + \alpha'(y)[1+\beta(x)]y' = 0,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(1+\varepsilon)\rho}{x} \qquad \left(\lim_{x=\infty} \varepsilon = 0\right),$$

en portant dans la première de ces égalités la valeur de y' tirée de la seconde, et remplaçant ρ par

$$\frac{\log y}{\log x}\,\frac{1}{1+\beta(x)},$$

on aura

$$\alpha'(y)[1+\beta(x)]y\log y$$
$$+(1+\varepsilon)[1+\beta(x)][1+\alpha(y)]\beta'(x)x\log x = 0.$$

Lorsque y croît indéfiniment, x aussi, $\beta(x)$, $\alpha(y)$, ε tendent vers zéro ainsi que $\beta'(x)x\log x$, donc

$$\lim_{y=\infty} \alpha'(y)y\log y = 0.$$

La proposition que nous avions en vue est ainsi démontrée, on peut introduire dans l'égalité (6) la fonction inverse de

$$x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}},$$

et l'on aura

$$(7)\quad \begin{cases} \log f(z) = (1+\varepsilon)\dfrac{\pi}{\sin\pi\rho}\, e^{i\varphi[\varphi+\pi-\omega]}\, r^{[1+\beta(r)]\rho} \\ \qquad (\omega - 2\pi \leqq \varphi \leqq \omega), \end{cases}$$

$[1+\beta(r)]\rho$ est un *exposant net*, égal ici à l'exposant brut pour toutes les valeurs de r_n.

10. *Application aux fonctions de genre zéro.* — Si l'on désigne par $M(r)$ le maximum du module d'une fonction entière de genre zéro pour $|z| = r$, et par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, on a évidemment

$$M(r) < \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{r_n}\right) < \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right),$$

en désignant par $\alpha(x)$ une fonction telle que

$$r_n \geqq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}} \qquad (n > N),$$

fonction qui a été calculée au paragraphe précédent. Or, nous avons trouvé une égalité asymptotique (7) pour

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{1+\alpha(n)}}}\right),$$

égalité d'où nous tirons

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}}}\right) = e^{(1+\varepsilon)\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\, r^{[1+\beta(r)]\rho}},$$

$x^{[1+\beta(x)]\rho}$ désigne la fonction inverse de $x^{\frac{1+\alpha(x)}{\rho}}$ donc $[1+\beta(x)]\rho$ est un exposant net de la suite des zéros de la fonction donnée. Nous arrivons donc au résultat suivant : *le logarithme du module maximum pour* $|z| = r$ *d'une fonction entière de genre zéro* (1) *reste, à partir d'une certaine valeur de* r, *inférieur à l'expression*

$$(1+\varepsilon)\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,r^{[1+\beta(r)]\rho} \qquad \left(\lim_{r=\infty} r = 0\right),$$

où $\rho[1+\beta(x)]$ *est un exposant net de la suite des zéros.*

Cette limite supérieure est atteinte lorsque l'exposant net est constamment égal à l'exposant brut.