

G. VALIRON

**Maximum du module des fonctions
entières de genre un et deux**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 193-212

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D4d]

**MAXIMUM DU MODULE DES FONCTIONS ENTIÈRES
DE GENRE UN ET DEUX;**

PAR M. G. VALIRON.

Je me propose de donner ici une limite supérieure précise du maximum du module d'une fonction entière d'ordre non entier et de genre un ou deux. Pour les fonctions de genre un, le résultat que j'indique est une généralisation de la formule donnée par M. Lindelöf dans son *Mémoire sur les fonctions entières* (p. 63), mais la méthode est différente. Je ferai usage des résultats obtenus par M. Denjoy dans le premier Chapitre de sa Thèse.

1. *Notations et résultats acquis.* — On peut évidemment se borner à considérer un produit canonique. Nous désignerons suivant l'usage par $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ les zéros; par r_n le module de a_n ; par p le genre et ρ l'exposant de convergence; enfin, nous posons

$$E(x, p) = (1-x) e^{x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^p}{p}},$$

de sorte que le produit s'écrit

$$F(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p\right).$$

Soit $\rho [1 + \beta(x)]$ un exposant net de la suite des
Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XII. (Mai 1912.)

(194)

zéros (1); on a, pour $n > n_0$,

$$n \leq r_n^{\rho[1+\beta(r_n)]},$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n ;

par suite, si $y^{\frac{1+\alpha(y)}{\rho}}$ désigne la fonction inverse de $x^{\rho[1+\beta(x)]}$, on a pour $n > n_0$

$$r_n \geq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux deux conditions suivantes :

$$(A) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha'(x)x \log x = 0.$$

Nous poserons

$$(1) \quad R_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

on aura donc

$$r_n \geq R_n \quad (n > n_0).$$

Soit alors $M(u)$ le maximum de $|E(x, \rho)|$ pour $x| = u$; $M(u)$ est une fonction croissante de u , on a donc

$$M\left(\frac{r}{r_n}\right) < M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

et, par suite, en désignant par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ pour $|z| = r$,

$$(2) \quad M(r) < \prod_{n=1}^{n=\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right).$$

Le calcul de $M(u)$ a été fait par M. Denjoy (Thèse, p. 17).

(1) Pour cette définition, voir mon article *Expression asymptotique de certaines fonctions entières* (Nouvelles Annales).

Pour $u \leq 1 + \frac{1}{p}$,

$$(3) \quad \begin{cases} \log[M(u)] = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin \theta} du, \\ u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}; \end{cases}$$

Pour $u \geq 1 + \frac{1}{p}$,

$$(4) \quad M(u) = (u-1) e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}};$$

le maximum correspond, pour $u \leq 1 + \frac{1}{p}$ à $x = u$, et pour $u \geq 1 + \frac{1}{p}$ à $x = ue^{i\theta}$.

2. Calcul de certaines sommes. — Soit a un nombre réel supérieur à un , définissons n' par les inégalités

$$(5) \quad R_{n'} \leq \frac{r}{a} < R_{n'+1};$$

nous désignerons par n_0 un nombre tel que, pour $x > n_0$, $\alpha(x)$ et $\alpha'(x)x \log x$ soient très petits (inférieurs en valeur absolue à un nombre positif η) et nous supposerons r assez grand pour que $\left(\frac{n_0}{n'}\right)^{1-\frac{p}{\rho}}$ soit arbitrairement petit ($< \eta$).

Ceci posé, considérons la somme

$$\sum_{n_0}^{n'} \frac{R_n^q}{r^q} \quad (q \geq -p);$$

en posant

$$\frac{r}{a} = (n' + \theta) \frac{1 + \alpha(n' + \theta)}{\rho} \quad (0 < \theta < 1),$$

on a

$$\sum_{n_0}^{n'} R_n^q = \theta_1 R_{n'}^q + \int_{n_0}^{n'+\theta} x^{[1+\alpha(x)] \frac{q}{\rho}} dx \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{\rho}{\rho+q} x x^{[1+\alpha(x)] \frac{q}{\rho}} \right] \\ &= x^{[1+\alpha(x)] \frac{q}{\rho}} \left[1 + \frac{q \alpha(x)}{\rho+q} - \frac{q}{\rho+q} x \log x \alpha'(x) \right] \\ &= (1 + \varepsilon'_q) x^{[1+\alpha(x)] \frac{q}{\rho}} \quad (1), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n_0}^{n'} R_n^q = \theta_1 R_{n'}^q + \frac{\rho}{\rho+q} \left[x x^{[1+\alpha(x)] \frac{q}{\rho}} \right]_{n_0}^{n'+\theta} (1 + \varepsilon''_q),$$

et, d'après la condition imposée à n' ,

$$\sum_{n_0}^{n'} R_n^q = \theta_1 R_{n'}^q + \frac{\rho}{\rho+q} n' \left(\frac{r}{a} \right)^q (1 + \varepsilon'''_q);$$

enfin, en utilisant l'inégalité (5),

$$(6) \quad \sum_{n_0}^{n'} \frac{R_n^q}{r^q} = n' \frac{\rho}{\rho+q} \frac{1}{a^q} (1 + \varepsilon_q) \quad (q \geq -p) \quad (2).$$

De la même façon, on pourra effectuer le calcul de la somme

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^q}{R_n^q} \quad (q \geq p+1);$$

on trouvera

$$(7) \quad \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^q}{R_n^q} = n' \frac{\rho}{q-\rho} a^q (1 + \varepsilon_{-q}).$$

(¹) Dans tout ce qui suit, ε affecté ou non d'indices représente une quantité tendant vers zéro avec n , et d'une façon uniforme, par exemple $\varepsilon_p^{\alpha} > \sqrt{\eta}$; η tend d'ailleurs vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

(²) Pour $q > 0$ on a, en effet, $R_n^q < \left(\frac{r}{a} \right)^q$; pour $q < 0$, $R_n^q = \frac{r}{a} (1 + \varepsilon_n)$, ε_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, car $\frac{R_{n'+1}}{R_{n'}}$ tend vers un.

Enfin, si nous considérons la somme

$$\sum_{n_0}^{n'} \log R_n,$$

nous pourrons l'écrire

$$\sum_{n_0}^{n'} \log R_n = \theta_1 \log R_{n'} + \int_{n_0}^{n'+\theta} \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x \, dx,$$

et comme

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1+\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1) \right] = \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x + \varepsilon(x)$$

($n_0 < x < n'$),

nous aurons

$$(8) \quad \sum_{n_0}^{n'} \log R_n = \theta_1 \log R_{n'} + n' \log \frac{r}{a} - n'(1+\varepsilon') \frac{1}{\rho}$$

$$= n' \log r - n'(1+\varepsilon) \left[\frac{1}{\rho} + \log a \right].$$

3. *Fonctions entières de genre un.* — Pour $p = 1$, l'inégalité (3) devient

$$\log [M(u)] = \int_0^u u \, du \quad \left(u \leq 1 + \frac{1}{p} \right);$$

donc pour $u \leq 2$, on a

$$(3') \quad \log M(u) \approx \frac{u^2}{2},$$

et pour $u \geq 2$,

$$(4') \quad M(u) = (u-1) e^u.$$

L'inégalité (2) devient alors

$$(2') \quad M(r) \leq \prod_{n=1}^{n=\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \left[\prod_1^{n'} \left(\frac{r}{R_n} - 1\right) e^{\frac{r}{R_n}} \right] e^{\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^2}{2R_n^2}},$$

(198)

où le nombre n' est défini par la double inégalité

$$R_{n'} \leq \frac{r}{2} < R_{n'+1}.$$

Nous allons donc appliquer les calculs du paragraphe précédent, en prenant $\alpha = 2$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{n_0}^{n'} \left(\frac{r}{R_n} - 1 \right) e^{\frac{r}{R_n}} &= \frac{r^{n'-n_0}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \dots R_{n'}} \prod_{n_0}^{n'} \left(1 - \frac{R_n}{r} \right) e^{\frac{r}{R_n}} \\ &= \frac{r^{n'-n_0}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \dots R_{n'}} e^{\sum_{n_0}^{n'} \left[\frac{r}{R_n} + \log \left(1 - \frac{R_n}{r} \right) \right]} = A e^B. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\log A = (n' - n_0) \log r - \sum_{n_0}^{n'} \log R_n.$$

et, en utilisant l'égalité (8) où $\alpha = 2$,

$$\log A = n'(1 + \varepsilon) \left[\frac{1}{\rho} + \log 2 \right] - n_0 \log r.$$

De même, d'après l'égalité (6),

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n_0}^{n'} \frac{r}{R_n} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q} \sum_{n=n_0}^{n=n'} \frac{R_n^q}{r^q} \\ &= n'(1 + \varepsilon) \left[\frac{2\rho}{\rho-1} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(\rho+q)} \frac{1}{2^q} \right], \end{aligned}$$

et enfin, d'après l'égalité (7),

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^2}{2 R_n^2} = n'(1 + \varepsilon) \frac{2\rho}{2 - \rho};$$

l'addition de ces divers résultats nous donne

$$\log M(r) \leq K + n'(\tau + \varepsilon) \left[\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(q+\rho)} \frac{1}{2^q} \right] - n_0 \log r,$$

où K dépend de n_0 et r , $K < n_0 h r$; par suite, en prenant r assez grand, comme $\frac{n'}{n_0 r}$ et $\frac{n'}{\log r}$ croissent indéfiniment, on a

$$(9) \quad \log M(r) \leq n'(\tau + \varepsilon) \left[\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(q+\rho)} \frac{1}{2^q} \right].$$

L'égalité a lieu lorsque les arguments des zéros sont convenablement choisis. Le crochet qui figure au second membre peut s'écrire sous une forme plus simple : on a

$$\frac{\rho}{q(q+\rho)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+\rho},$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(\rho+q)2^q} &= \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q2^q} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q} \\ &= \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q}, \end{aligned}$$

le crochet considéré devient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q} \\ = \frac{2\rho}{2-\rho} + 2 + \frac{1}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q}, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire, en groupant les deux premiers termes et en faisant entrer le troisième et le quatrième dans le Σ ,

$$\frac{4}{2-\rho} + \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^{q-1}} = \frac{4}{2-\rho} + 2 \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^q}$$

en posant

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + 2 \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^q},$$

nous avons

$$(10) \quad \log M(r) \leq n'(1+\varepsilon)H_2;$$

n' est défini par les inégalités

$$R_{n'} \leq \frac{r}{2} < R_{n'+1}$$

ou

$$(n'+\theta) \frac{1+\alpha(n'+\theta)}{\rho} = \frac{r}{2}.$$

On tire de là

$$n'+\theta = \left(\frac{r}{2}\right)^{\rho \left[1+\beta\left(\frac{r}{2}\right)\right]},$$

$\beta(x)$ étant la fonction considérée au paragraphe 1; or, d'après les propriétés (A) qui sont vérifiées par $\beta(x)$, on a

$$\beta\left(\frac{r}{2}\right) = \beta(r) - \frac{r}{2} \beta'(\theta'r) \quad \left(\frac{1}{2} < \theta' < 1\right)$$

ou

$$\beta\left(\frac{r}{2}\right) = \beta(r) - \frac{\varepsilon}{\log r},$$

et par suite

$$n' = (1+\varepsilon) \frac{r^{\rho(1+\beta(r))}}{2^{\rho}}.$$

L'inégalité (10) prend ainsi la forme

$$(11) \quad \log M(r) \leq (1 + \varepsilon) \frac{H_2}{2\rho} r^{\rho(1+\beta(r))},$$

où $\rho[1 + \beta(x)]$ est un exposant net de la fonction.

Le nombre H_2 est défini par une série convergente à la façon d'une progression géométrique, si l'on désigne par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

la série hypergéométrique

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)}{1 \cdot 2 \dots p} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+p-1)} x^p + \dots,$$

on peut écrire

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^q} = \frac{1}{\rho-1} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\rho-1}{\rho+q-1} \frac{1}{2^q} \\ = \frac{1}{\rho-1} F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right),$$

de sorte que nous avons

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + \frac{2}{\rho-1} F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right).$$

On peut aussi retrouver la forme donnée au nombre H_2 par M. Lindelöf. Considérons d'une façon générale le nombre

$$E = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-p)c^q} = \frac{1}{\rho-p} F\left(1, \rho-p, \rho, \frac{1}{c}\right) \\ (\rho > p, c \geq 2).$$

Si nous considérons la série

$$g(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{x^{\rho-p+q}}{(\rho-p+q)c^q},$$

on a

$$E = g(1) \quad \text{et} \quad g(0) = 0;$$

d'autre part,

$$g'(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^{\rho-p-1+q}}{c^q} = x^{\rho-p-1} \frac{1}{1-\frac{x}{c}},$$

donc

$$E = \int_0^1 \frac{x^{\rho-p-1}}{1-\frac{x}{c}} dx.$$

En posant $x = 1 - \frac{1}{z}$, nous aurons

$$\begin{aligned} E &= - \int_1^{+\infty} \frac{c}{c-1} (z-1)^{\rho-p-1} z^{-\rho+p-1} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} dz \\ &= - \frac{c}{c-1} \int_1^{\infty} z^{-\rho+p-1} (z-1)^{\rho-p-1} dz \\ &\quad \times F\left(1, 1, \rho-p+1, \frac{1}{1-c}\right), \end{aligned}$$

et comme

$$- \int_1^{\infty} z^{-\rho+p-1} (z-1)^{\rho-p-1} dz = \int_0^1 (1-u)^{\rho-p-1} du = \frac{1}{\rho-p},$$

on aura

$$E = \frac{c}{c-1} \frac{1}{\rho-p} F\left(1, 1, \rho-p+1, \frac{1}{1-c}\right),$$

ou encore l'égalité

$$F\left(1, \rho-p, \rho, \frac{1}{c}\right) = \frac{c}{c-1} F\left(1, 1, \rho-p+1, \frac{1}{1-c}\right).$$

En particulier, pour $p=1$, $c=2$, nous obtenons

$$F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right) = 2 F(1, 1, \rho, -1),$$

en portant dans l'expression de H_2 , on a

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + \frac{4}{\rho-1} F(1, 1, \rho, -1):$$

c'est l'expression trouvée par M. Lindelöf. La série $F(1, 1, \rho, -1)$ converge d'ailleurs très lentement.

4. *Fonctions de genre deux.* — Dans ce cas, $p = 2$, les expressions du maximum $M(u)$ deviennent : pour $u \leq \frac{3}{2}$,

$$(3'') \quad \log M(u) = 2 \int_0^u u^2 \cos \theta \, du \quad \left(u = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \right);$$

pour $u \geq \frac{3}{2}$,

$$(4'') \quad M(u) = (u-1) e^{u + \frac{u^2}{2}}.$$

De l'égalité $u = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$ nous tirons

$$u = \frac{4 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos \theta},$$

d'où, comme $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$,

$$\cos \theta = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4}}{4};$$

et par conséquent nous avons, pour $u \leq \frac{3}{2}$,

$$(12) \quad \begin{aligned} \log M(u) &= 2 \int_0^u \frac{u^3 + 2u^2 \left(1 + \frac{u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{4} \, du \\ &= \frac{u^4}{8} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{40} + \dots \\ &\quad + (-1)^{q+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2q-3)}{1 \cdot 2 \dots q} \frac{u^{2q+3}}{(2q+3)2^{3q}} + \dots \end{aligned}$$

Nous aurons ici

$$M(r) \cong \prod_1^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \prod_1^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

en posant

$$R_{n'} \leq \frac{2r}{3} < R_{n'+1}.$$

Le calcul de $\prod_1^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$ est analogue à celui fait précédemment, il suffira d'utiliser les résultats du paragraphe 2, en prenant $\alpha = \frac{3}{2}$. Nous aurons

$$\prod_{n_0}^n M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \frac{r^{n'-n_0}}{R_1 R_2 \dots R_{n'}} e^{\sum_{n_0}^{n'} \left[\frac{1}{R_n} + \frac{r^2}{2R_n^2} + \log\left(1 - \frac{R_n}{r}\right) \right]},$$

et nous obtiendrons

$$(13) \quad \prod_{n_0}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = e^{n'(1+\varepsilon)L - n_0 \log r},$$

où L est défini comme il suit :

$$L = \frac{1}{\rho} + \log \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{9}{8} \frac{\rho}{\rho-2} - \sum_1^{\infty} \frac{\rho}{q(\rho+q) \left(\frac{3}{2}\right)^q};$$

ici encore, nous pouvons transformer cette expression

$$\frac{\rho}{q(\rho+q)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+\rho},$$

d'où

$$(14) \quad L = \frac{1}{\rho} + \log \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\rho-1} + \frac{9}{8} + \frac{9}{4} \frac{1}{\rho-2} \\ + \sum_1^{\infty} \frac{1}{(q+\rho) \left(\frac{3}{2}\right)^q} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{q \left(\frac{3}{2}\right)^q},$$

ce qui peut s'écrire

$$L = \frac{21}{8} - \log 2 + \frac{9}{4} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho-2) \left(\frac{3}{2}\right)^q} \\ = \frac{21}{8} - \log 2 + \frac{9}{4(\rho-2)} F\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right).$$

Il reste à calculer $\prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$; le logarithme de cette

expression est

$$\sum_{n=n'+1}^{n'+\infty} \left[\frac{r^4}{8R_n^4} + \frac{r^3}{3R_n^3} + \frac{r^5}{40R_n^5} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{q+1} \frac{1.3\dots(2q-3)}{1.2\dots q} \frac{r^{2q+3}}{(2q+3)2^{3q}R_n^{2q+3}} + \dots \right];$$

si, dans la parenthèse, on remplace chaque terme par sa valeur absolue, on a une somme inférieure à $\frac{11}{8} \frac{r^3}{R_n^3}$ comme on le constate aisément, et comme la série $\sum \frac{1}{R_n^3}$ converge, on peut intervertir l'ordre des sommes, et écrire l'expression précédente :

$$\frac{1}{8} \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^4}{R_n^4} + \frac{1}{3} \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^3}{R_n^3} + \dots \\ + (-1)^{q+1} \frac{1.3\dots(2q-3)}{1.2\dots q} \frac{1}{(2q+3)2^{3q}} \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^{2q+3}}{R_n^{2q+3}} + \dots$$

Par suite, en utilisant l'égalité (7), nous aurons

$$\log \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \\ = n'(1+\varepsilon) \left[\frac{81\rho}{128(4-\rho)} + \frac{1}{3} \frac{\rho}{3-\rho} \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{q+1} \frac{1.3\dots(2q-3)}{1.2\dots q} \right. \\ \left. \times \frac{\rho}{(2q+3)(2q+3-\rho)} \frac{3^{2q+3}}{2^{5q+3}} + \dots \right].$$

Nous allons transformer le nombre entre crochets de la formule précédente en posant

$$\frac{\rho}{(2q+3)(2q+3-\rho)} = \frac{1}{4-\rho} - \frac{1}{2q+3} + \frac{2q-1}{(\rho-4)(2q+3-\rho)}$$

égalité qui s'obtient en décomposant la fraction ration-

nelle en q

$$\frac{\rho}{(2q-1)(2q+3)(2q+3-\rho)}.$$

en fractions simples ; nous obtenons alors

$$(15) \log \prod_{n'=1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \\ = n'(1+\varepsilon) \left[\frac{81\rho}{128(4-\rho)} + \frac{27}{8} \frac{1}{4-\rho} \mathbf{P} \right. \\ \left. - \mathbf{Q} + \frac{27}{8} \frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \mathbf{R} \right],$$

où nous avons

$$\mathbf{P} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{16} \right) + \dots \\ + (-1)^{q+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2q-3)}{1 \cdot 2 \dots q} \frac{1}{2^q} \left(\frac{9}{16} \right)^q + \dots = \left(1 + \frac{9}{16} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4},$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 + \frac{1}{40} \left(\frac{2}{3} \right)^5 + \dots \\ + (-1)^{q+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2q-3)}{1 \cdot 2 \dots q} \\ \times \frac{1}{2q+3} \frac{1}{2^{2q}} \left(\frac{3}{2} \right)^{2q+3} + \dots = \int_0^{\frac{2}{3}} x^2 \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$\mathbf{R} = 1 + \dots + (-1)^q \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} + q - 1 \right)}{1 \cdot 2 \dots q} \\ \times \frac{\frac{3-\rho}{2}}{\frac{5-\rho}{2} + q - 1} \left(\frac{9}{16} \right)^q + \dots \\ = \mathbf{F} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16} \right).$$

Le calcul numérique de \mathbf{Q} se fait immédiatement :

on a

$$\mathbf{Q} = \int_0^{\frac{2}{3}} x^2 \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t^2)(1+t^2)^2}{2t^5} dt \\ = -\log 2 + 2 - \frac{1}{128};$$

en portant ces valeurs dans l'égalité (15), on obtient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \log \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \\
 &= n'(1+\varepsilon) \left[\log 2 - \frac{21}{8} + \frac{27}{4} \frac{1}{4-\rho} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{27}{8} \frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \right. \\
 &\quad \left. \times F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right) \right] = n'(1+\varepsilon)S.
 \end{aligned}$$

La comparaison des égalités (13) et (16) nous donne alors, à la condition de prendre n' assez grand, pour que $n_0 \log r$ soit négligeable, ainsi que $\prod_1^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$;

$$M(r) \leq \prod_1^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = e^{n'(1+\varepsilon)H_3}$$

où le nombre H_3 est égal à $L + S$; donc

$$\begin{aligned}
 (17) \quad H_3 = L + S &= \frac{27}{4} \frac{1}{4-\rho} + \frac{9}{4(\rho-2)} \\
 &\times F\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right) + \frac{27}{8} \frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \\
 &\times F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right);
 \end{aligned}$$

le calcul de ce nombre H_3 revient au calcul de deux séries qui convergent à la façon de progressions géométriques.

Enfin, on voit, comme au paragraphe précédent, que

$$n' = (1 + \varepsilon') \frac{r^{(1+\beta(r))\rho}}{\left(\frac{3}{2}\right)^\rho},$$

$[1 + \beta(x)]^\rho$ étant un exposant net; par suite, nous

obtenons l'inégalité

$$(18) \quad M(r) \leq e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{3}\right)^p H_3 r^{(1+\varepsilon)(\frac{2}{3})^p}},$$

où H_3 est le nombre défini par l'égalité (17). L'égalité a lieu sur une infinité de cercles (avec $\varepsilon \geq 0$), si les arguments des zéros sont convenablement choisis et si $r_n = R_n$.

§. *Généralisation de quelques résultats de M. Lindelöf.* — M. Denjoy a également montré que le maximum $M(u)$ de $E(x, p)$, pour $|x| = u$, satisfait à l'inégalité

$$M(u) < e^{A u^\tau} \quad (p \leq \tau \leq p + 1);$$

le nombre A est inférieur ou égal à un , pour $p \geq 2$ (¹); pour $p = 1$ on a $A \leq \nu$, ν désignant la racine de l'équation $x + \log(x - 1) = 0$ ($\nu = 1, 27, \dots$).

On peut, en appliquant ce résultat, préciser les résultats bien connus de M. Lindelöf; je les généraliserai en même temps en introduisant l'exposant net. En désignant toujours par n_0 un nombre tel que, pour $n > n_0$,

$$|x(x)| < \eta, \quad |x \log x x'(x)| < \eta;$$

posons

$$M(r) = \prod_1^\infty M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \prod_1^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n_0+1}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n'+1}^\infty M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

n' étant défini ici par les inégalités

$$R_{n'} \leq r < R_{n'+1}.$$

Nous aurons

$$\prod_1^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right) < e^{hn_0 r^p};$$

(¹) *Thèse*, page 24.

puis

$$\prod_{n'+1}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) < e^{\Lambda r^p \sum_{n'+1}^n \frac{1}{R_n^p}}$$

$$\prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) < e^{\Lambda r^{p+1} \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{R_n^{p+1}}}$$

En utilisant encore ici les inégalités

$$\sum_{n'+1}^{n'} \frac{1}{R_n^p} < \int_{n_0}^{n'} \frac{dx}{x^{\frac{p}{\rho} [1+\alpha(x)]}} = \frac{\rho n'}{\rho - p} \frac{1}{R_{n'}^p} (1 + \varepsilon')$$

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{R_n^{p+1}} < \int_{n'}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{p+1}{\rho} [1+\alpha(x)]}} = \frac{\rho n'}{p+1-\rho} \frac{1}{R_{n'}^{p+1}} (1 + \varepsilon'');$$

nous aurons, en prenant n' assez grand pour que $\frac{n_0 r^p}{n}$ soit très petit,

$$M(r) < e^{\frac{\rho \Lambda}{p+1-\rho} (\rho - p)^{-1} n'^{(1+\varepsilon)}}$$

En introduisant l'exposant net, on a

$$n' = r^{\rho[1+\beta(r)]} - \theta \quad (0 < \theta < 1);$$

donc, nous obtenons, pour les fonctions de genre supérieur ou égal à deux, l'inégalité

$$(19) \quad M(r) < e^{\frac{\rho(1+\varepsilon)}{p+1-\rho} (\rho - p)^{-1}} r^{\rho[1+\beta(r)]},$$

et pour les fonctions de genre un

$$(20) \quad M(r) < e^{\frac{1,27 \rho(1+\varepsilon)}{p-1-\rho} (\rho - p)^{-1}} r^{\rho[1+\beta(r)]}.$$

L'inégalité (19) peut être utilisée pour les fonctions de genre supérieur à deux, pour lesquelles le calcul d'une limite supérieure précise paraît beaucoup plus

compliqué que pour les fonctions considérées précédemment. Il résulte d'ailleurs des calculs du paragraphe 2 que la limite supérieure exacte du logarithme de $M(r)$, est, quel que soit le genre, de la forme $Kr^{\rho[1+\beta(r)]}$, où $\rho[1+\beta(x)]$ est un exposant net, et K une fonction de ρ seulement, et non de $\beta(x)$.

Enfin, le théorème de M. Jensen donne

$$M(r) > \frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n} > \left(\frac{r}{r_n}\right)^n,$$

quel que soit le nombre entier n . En désignant par n'' le nombre des zéros intérieurs au cercle de rayon $\frac{r}{h}$, on aura

$$M(r) > h^{n''};$$

la considération des cas où l'on aurait

$$r_n = n \frac{1+\alpha(n)}{\rho},$$

quel que soit n , conduit à prendre $h = e^{\frac{1}{\rho}}$; or, pour une infinité de valeurs de n , on a

$$r_n = n \frac{1+\alpha(n)}{\rho},$$

si donc nous prenons r de façon que

$$n'' = \left(\frac{r}{\frac{1}{e^{\frac{1}{\rho}}}}\right)^{\rho \left[1 + \beta\left(\frac{r}{e^{\frac{1}{\rho}}}\right)\right]} = \frac{(1+\varepsilon) r^{\rho[1+\beta(r)]}}{e},$$

nous aurons, pour une *infinité de valeurs de z* ,

$$(21) \quad M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{\rho} \rho[1+\beta(r)]}.$$

L'inégalité (21) est d'ailleurs la plus précise qu'on puisse obtenir. Il suffit, en effet, de reproduire en le

modifiant un peu le raisonnement employé par M. Lindelöf à la page 64 de son Mémoire, pour voir qu'il existe des fonctions d'exposant net $\rho[1 + \beta(x)]$, et pour lesquelles on a, à partir d'une certaine valeur de r ,

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{\rho r^{\rho[1+\beta(r)]}}}$$

En résumé, on voit qu'étant donnée une fonction d'exposant net $\rho[1 + \beta(x)]$, la limite supérieure pour r infini de l'expression

$$\frac{M(r)}{r^{\rho[1+\beta(r)]}}$$

est supérieure ou égale au nombre $\frac{1}{e\rho}$ et inférieure ou égale à un nombre K . Ce nombre K est égal à $\frac{\pi}{\sin \pi\rho}$ (1) lorsque le genre est zéro; à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\rho} \left[\frac{4}{2-\rho} + 2 \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^q} \right] \\ & = \frac{2^{2-\rho}}{2-\rho} + \frac{2^{1-\rho}}{\rho-1} F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

lorsque le genre est égal à un; à

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho} \frac{2}{4-\rho} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2-\rho} \frac{F\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right)}{\rho-2} \\ & + \left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right)}{(4-\rho)(3-\rho)}, \end{aligned}$$

lorsque le genre est deux; enfin K est inférieur à

$$\frac{\rho}{(p+1-\rho)(\rho-p)},$$

lorsque le genre p est supérieur à deux.

(1) Voir l'article déjà cité des *Nouvelles Annales*.

Dans le cas où, quel que soit $n < n_0$, on a

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

le dernier calcul du paragraphe 2, appliqué à l'inégalité de Jensen donne

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{\rho} r^{\rho(1+\beta, r)}},$$

cette inégalité est la plus précise qu'on puisse obtenir, tant qu'on ne fait aucune hypothèse sur les arguments des zéros (1).

On peut également introduire le nombre des zéros compris dans le cercle de rayon r : soit n ce nombre; pour une infinité de valeurs du nombre n'' défini plus haut, on a

$$n'' = \frac{r^{\rho(1+\beta(r))}}{e} (1 + \varepsilon),$$

et comme $n \leq r^{\rho(1+\beta(r))}$, nous aurons

$$n'' > \frac{n}{e} (1 + \varepsilon), \quad r^{\rho(1+\beta, r)} < en(1 + \varepsilon);$$

et, par suite,

$$(22) \quad (1 - \varepsilon) \frac{1}{\rho e} n < \log M(r) < (1 + \varepsilon) K en,$$

inégalité valable pour une infinité de valeurs de n . Cette double inégalité pourra servir dans l'énoncé des réciproques; tous les résultats de M. Lindelöf relatifs au cas où

$$r^{\rho(1+\beta(r))} = A r^{\rho} (\log r)^{\alpha_1} (\log_2 r)^{\alpha_2} \dots (\log_k r)^{\alpha_k},$$

s'étendent immédiatement au cas général.

(1) On le voit en appliquant la méthode employée par M. Lindelöf (p. 68).