

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12
(1912), p. 185-192

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__185_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

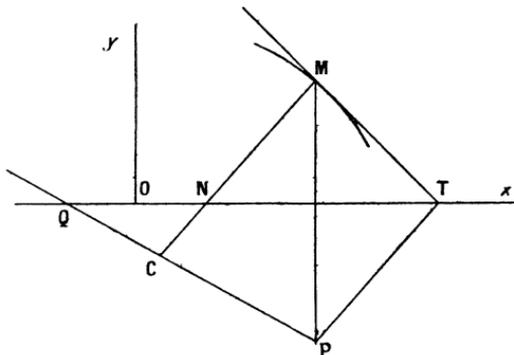
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Existence de l'intégrale définie.*

II. Problème. — *Étant donné un point M d'une courbe (C), on mène la tangente MT, la normale MN, et l'on détermine le point P par l'intersection de la perpendiculaire menée par M à l'axe Ox et de la parallèle menée par T*



à MN; on joint le point P au centre de courbure C relatif au point M; la droite CP rencontre Ox en Q.

1° Déterminer la courbe (C) connaissant l'abscisse X de Q;

2° Cette détermination se ramène aux quadratures si X est fonction de x; on prendra cette fonction sous la forme

$$X = x f(x);$$

3° Traiter les cas particuliers suivants :

$$f(x) = k; \quad f(x) = \frac{k}{x}; \quad f(x) = x,$$

où k est une constante.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} dx}{3x^2+2x+1}.$$

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Surfaces développables. Définition. Indiquer quelles sont leurs lignes asymptotiques et leurs lignes de courbure. Toute surface développable satisfait à l'équation $rt - s^2 = 0$ et inversement les intégrales de l'équation $rt - s^2 = 0$ sont les surfaces développables.*

II. Problème. — *La droite*

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = \varphi - \cos \varphi$$

enveloppe une courbe C dont on donnera la définition géométrique.

Soit ω le centre de courbure relatif à un point M de la courbe C; sur la normale ωM , on prend le point P tel que

$$\omega P = k \overline{\omega M}.$$

Le point P décrit une courbe; construire la tangente en un point de cette courbe, en supposant d'abord que k est une quantité fixe, puis une quantité variable.

Déterminer les courbes Γ qui coupent les normales ωM sous un angle constant θ .

Soit en particulier Γ_1 celle de ces courbes qui passe par le même point que la courbe C pour $\varphi = 0$; déterminer sa développée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''' - y'' - y' + y = (24x - 4)e^x + 3x.$$

Déterminer l'intégrale qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$x = 0, \quad y = 1, \quad y' = -1, \quad y'' = 0.$$

Calculer à 0,001 près l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0,8$ ainsi que le coefficient angulaire de la tangente en ce point.

(Juillet 1911.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$2p \operatorname{ch} x + 2q y \operatorname{sh} x - z \operatorname{sh} x = 0.$$

Déterminer la surface intégrale qui contient la droite

$$x = y = z$$

et celle qui contient la parabole

$$x = 0, \quad z^2 = 2m(y - a).$$

Qu'arrive-t-il si l'on cherche à déterminer une surface intégrale passant par la chaînette $z = 0$, $y = a \operatorname{ch} x$?

II. Chercher les lignes asymptotiques de la surface qui a pour équation

$$x \cotang \left(\frac{y}{x} \right) = 1 - z \cotang z.$$

Nota. — On pourra poser $z = v$, $y = ux$, et exprimer ainsi x , y , z en fonction de u et v .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit

$$y^2 = X = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Je considère les intégrales

$$y_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}, \quad z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{X}};$$

exprimer y_2 et y_3 en fonction de y_0, y_1 ; puis z_2 en fonction de z_1, y_0, y_1 ; on distinguera les deux cas où a est ou n'est pas zéro de X .

Posant enfin $x = pu$, $y = p'u$, dire quelles formules on en déduit relativement aux fonctions elliptiques.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Exprimer $p(2u)$ en fonction rationnelle de pu ;

2° Étant donné $pu = a$, calculer $p\left(\frac{u}{2}\right) = t$. Peut-on interpréter géométriquement la signification des racines de l'équation en t obtenue, en utilisant la cubique définie par les équations

$$x = pu, \quad p = p'u;$$

3° 2ω et $2\omega'$ étant les périodes de la fonction elliptique pu , on suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs; a étant réel,

à quelle condition les quatre racines de l'équation en t sont-elles réelles ? Si $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ désignent ces quatre racines, rangées par ordre de grandeur, et si l'on pose $p(v_\alpha) = t_\alpha$, déterminer v_1, v_2, v_3, v_4, v étant un nombre tel que $p^v = a$;

4° e_1 désignant le plus grand zéro du polynome $4z^3 - g_2z - g_3$, où g_2, g_3 sont les deux invariants relatifs à pu , on suppose en particulier $a = e_1$. Étudier ce cas spécial. Calculer $p\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right)$.

II. Soit $y = p(mu)$, $x = pu$: trouver la relation qui existe entre $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. Montrer que si m est un nombre entier réel, l'équation différentielle obtenue admet une intégrale de la forme $y = R(x)$, R désignant une fonction rationnelle de x .

Formules pouvant être utiles :

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2,$$

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

La formule à obtenir dans la première question est

$$p(2u) = \frac{\left(p^2 u + \frac{1}{4} g_2^2\right)^2 + 2g_3 pu}{4p^3 u - g_2 pu - g_3}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la cubique gauche Γ qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, est définie par les équations

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

Soit M l'un de ses points. Le plan osculateur P au point M à la cubique Γ coupe l'axe Oz au point A . On considère la surface réglée S engendrée par la droite MA lorsque le point M décrit la cubique Γ . On demande de trouver les lignes asymptotiques de la surface S .

Dans le plan xOy on considère les deux points $B(x=y=1)$ et $C(x=1, y=2)$. Par le point B passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de S sur le plan xOy , parallèlement à Oz ; par le point C passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de S sur le plan xOy , parallèlement à Oz . Ces quatre lignes forment un qua-

drilatère mixtiligne BECD, dont B et C sont deux sommets opposés. On considère le cylindre qui a pour base ce quadrilatère, dont les génératrices sont parallèles à Oz, et qui est limité à la surface S. Trouver le volume de ce cylindre.
(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soient OX, OY, OZ, trois axes de coordonnées rectangulaires. Une surface S jouit de la propriété suivante : si M(x, y, z), est un point de cette surface, N, le point où la normale en M à la surface S coupe le plan XOY, P, le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan XOY, on a $\overline{PN} = a$, a désignant une longueur constante. Trouver l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont la surface S est une surface intégrale.

II. Trouver une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles.

III. Déterminer la bande caractéristique d'éléments linéaires, (x, y, z, p, q), définie par un élément (x₀, y₀, z₀, p₀, q₀) dont les coordonnées satisfont à l'équation aux dérivées partielles. Quelle est la nature des courbes caractéristiques?

IV. Chercher l'équation du cône T, enveloppe des plans tangents aux surfaces intégrales qui passent par un point donné, (x, y, z). En déduire l'équation aux différentielles totales des courbes intégrales.

V. Chercher la surface intégrale engendrée par les courbes caractéristiques issues du point x = y = 0, z = h.

VI. Déterminer les deux surfaces intégrales qui passent par la droite x = y = z.

VII. Chercher les courbes intégrales situées dans le plan z = x, et en particulier la courbe intégrale C de ce plan qui passe au point z = x = a, y = 0.

VIII. Déterminer la surface intégrale qui contient la courbe C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer l'intégrale de surface

$$I = \int \int (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy),$$

la surface S étant définie par les équations

$$x = (a + b \cos \varphi) \cos \psi,$$

$$y = (a + b \cos \varphi) \sin \psi,$$

$$z = b \sin \varphi,$$

a et b sont des constantes, φ et ψ varient de 0 à 2π .

II. Chercher sur la surface qui a pour équation en axes de coordonnées rectangulaires, $z = \cos x \cos y$, le lieu des points où l'indicatrice est un système de droites parallèles, le lieu des points où l'indicatrice est formée d'hyperboles équilatères conjuguées, et, enfin, trouver les lignes asymptotiques. (Juillet 1911.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° On peut intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 - y^4) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

en prenant pour nouvelles variables les quantités y et $\frac{x}{y}$. Les courbes intégrales (C) sont unicursales et n'ont aucun point à l'infini;

2° Comment définit-on les diverses significations de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)(\bar{z}^2 + \bar{z} + 1)}$$

lorsque le point z décrit dans son plan un chemin quelconque allant d'un point z_0 à un point z ?

3° Si le chemin choisi est fermé et est formé par l'une des courbes unicursales (C) ne passant par aucun point singulier, distinguer les différents groupes de courbe (C) qui diffèrent par les valeurs d'intégrales qu'elles fournissent.

SOLUTION.

1° Si $\frac{x}{y} = t$, on a

$$y \, dy + t \, dt = 0,$$

d'où les courbes (C)

$$(D) \quad \frac{x^2}{y^2} + y^2 = a^2,$$

ou

$$x = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \quad \text{et} \quad y = a \sin \varphi.$$

Quand a varie, les courbes (C) se succèdent boucles dans boucles, comme le prouvent l'étude du coefficient angulaire des tangentes à l'origine et la forme en huit des courbes;

3° Les points singuliers et leurs résidus sont :

$$m = +i, \quad m' = -i, \quad b = \alpha, \quad b' = \alpha^2,$$

$$\varepsilon_m = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon_{m'} = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon_b = \frac{3 - i\sqrt{3}}{6}, \quad \varepsilon_{b'} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}.$$

Les valeurs de séparation sont $\alpha^2 = 1, \frac{13}{12}$. Les deux premiers groupes de courbes (C) donnent zéro. Le dernier groupe donne, pour un seul tour, $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Condition pour qu'une série de sections circulaires d'un ellipsoïde soit une série de lignes de courbure;*

2° *Les pôles d'une fonction méromorphe sont simples et disposés d'après la loi*

$$a_n = \sqrt[3]{n} e^{in\frac{\pi}{4}}.$$

Les résidus sont donnés par la formule

$$\varepsilon_n = \frac{n+i}{n-i}.$$

Former, d'après la règle d'Hermite, l'expression d'une fonction qui ne diffère de la fonction méromorphe que par une fonction entière.

SOLUTION.

1° Toute sphère passant par une section circulaire coupe la surface suivant une seconde section circulaire.

Tout système de cercles lignes de courbure correspond à un système de sphères inscrites.

La compatibilité des deux conditions impose que les deux systèmes de sections circulaires soient confondus. Donc l'ellipsoïde est de révolution.

2° La fonction d'Hermite est

$$\sum_1^{\infty} \frac{n+i}{n-i} \left[-\frac{1}{z - n^{\frac{1}{3}} e^{in\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} e^{in\frac{\pi}{2}}} + \frac{z}{n^{\frac{2}{3}} i 2n^{\frac{\pi}{4}}} + \frac{z^2}{n^{\frac{3}{8}} i 3n^{\frac{\pi}{4}}} + \frac{z^3}{n^{\frac{3}{8}} e^{i 3n\frac{\pi}{4}}} \right].$$

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée par les équations

$$x = (1 + u) \operatorname{ch} v,$$

$$y = (1 - u) \operatorname{sh} v,$$

$$z = u,$$

où $\operatorname{sh} v$ et $\operatorname{ch} v$ représentent le sinus et le cosinus hyperboliques de l'argument v et où u et v sont les variables indépendantes;

2° Même question en supposant que l'on remplace $\operatorname{sh} v$ et $\operatorname{ch} v$ par le sinus et le cosinus ordinaires, $\sin v$ et $\cos v$;

3° Rapprocher les deux questions.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Conditions pour que l'intégrale définie

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

ait un sens.

Démontrer que l'on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$J = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx.$$

Démontrer que, si l'on pose $p = \frac{2m+1}{2n}$ en prenant pour m et n des nombres entiers tels que p satisfasse aux conditions trouvées plus haut, on a aussi

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n x^{2m} dx}{1+x^{2m}}.$$

Enfin, à l'aide de cette dernière forme, montrer que l'on a

$$J = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(Juin 1911.)