J. Haag

Sur la sommation de certaines séries

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 181-185

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__181_1>

[D2b]

SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES;

PAR M. J. HAAG.

Nous nous proposons d'indiquer certaines catégories de séries que l'on peut sommer par l'application de la théorie des séries entières et dont des exemples ont été plusieurs fois demandés aux examens oraux de l'École Polytechnique.

1. *Si le terme général d'une série est une fraction rationnelle en n dont tous les pôles sont entiers et simples, on peut toujours sommer cette série.*

Soit, en effet, la série

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\ldots(n+l)},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont p nombres entiers, positifs ou négatifs, et où $P(n)$ désigne un polynome en n de degré au plus égal à $p-2$, afin qu'il y ait convergence. On suppose, en outre, qu'on ne donne à n que des valeurs supérieures au plus grand des nombres $-a, -b, \ldots,$

$-l$, de manière qu'aucun terme ne devienne infini. Il revient au même d'admettre que tous les pôles sont négatifs et que n prend toutes les valeurs entières, à partir de 1.

Cela posé, décomposons la fraction rationnelle u_n en éléments simples, soit

$$u_n = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+B} + \ldots + \frac{L}{n+l}.$$

D'après l'hypothèse faite sur le degré de $P(n)$, la somme des résidus $A + B + \ldots + L$ est nulle.

Introduisons la série entière

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Ax^n}{n+a} + \frac{Bx^n}{n+b} + \ldots + \frac{Lx^n}{n+l} \right).$$

Elle admet pour intervalle de convergence $(-1, +1)$. D'autre part, pour $x = 1$, elle est convergente, puisqu'elle se réduit à la série (u_n). Donc, d'après le théorème d'Abel, la somme U de celle-ci est la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

Or, il est facile d'avoir une expression simple de $f(x)$. Calculons, par exemple, la série entière

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ax^n}{n+a}.$$

A cet effet, nous écrivons l'identité

$$\frac{-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^a}{a}}{x^a}$$
$$= \frac{x}{1+a} + \frac{x^2}{2+a} + \ldots + \frac{x^n}{n+a} + \ldots.$$

D'où l'on tire

$$\alpha(x) = \frac{A}{x^a}\left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^a}{a}\right],$$

et, par suite,

$$f(x) = -\log(1-x)\left(\frac{A}{x^a} + \frac{B}{x^b} + \ldots + \frac{L}{x^l}\right)$$
$$-\sum \frac{A}{x^a}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^a}{a}\right),$$

le signe Σ indiquant une somme qui doit porter sur tous les nombres $a, b, \ldots, l$.

Si l'on fait maintenant tendre x vers 1, le premier terme de $f(x)$ tend vers zéro, comme on le voit en posant $1 - x = y$ et se rappelant que $A + B + \ldots + L = 0$. *On a donc finalement la formule élégante*

$$U = -\sum A\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a}\right). \tag{1}$$

Remarquons que si $a = 0$, les termes correspondants n'existent pas, car $\alpha(x) = -A\log(1-x)$.

Exemple. — Soit à calculer la série

$$U = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$$

(examens oraux de l'École Polytechnique, 1911).

On écrit d'abord

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)(n+3)}.$$

Or

$$\frac{2n+5}{n(n+1)(n+3)} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{n+1} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{n+3}.$$

Appliquant la formule (1), on a immédiatement

$$U = +\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{65}{36}.$$

2. *Si le terme général d'une série est le produit par $\frac{1}{n!}$ d'une fraction rationnelle en n dont tous les pôles sont simples, entiers et négatifs, on peut toujours sommer cette série.*

Soit, en effet, la série

$$u_n = \frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\ldots(n+l)}\,\frac{1}{n!},$$

où a, b, $\ldots$, l sont des entiers positifs et $P(n)$ un polynome quelconque en n. On a

$$\frac{P(n)}{(n+a)(n+b)\ldots(n+l)} = \sum \frac{A}{n+a} + \sum M_p n^p.$$

On est donc ramené à une somme de séries appartenant aux deux types suivants :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)n!}, \qquad W_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}.$$

Or, celles-ci se calculent aisément en partant du développement de e^x. On a, en effet,

$$x^{a-1} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a-1}}{n!},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a}}{n!(n+a)} &= \int_0^x e^x x^{a-1}\,dx \\ &= e^x[x^{a-1} - (a-1)x^{a-2} \\ &\qquad + (a-1)(a-2)x^{a-3} - \ldots] + (-1)^a (a-1)!\end{aligned}$$

En faisant $x = 1$, il vient

$$\begin{aligned}V = e[1 &- (a-1) + (a-1)(a-2) \\ &- (a-1)(a-2)(a-3) + \ldots + (-1)^{a-1}(a-1)!] \\ &+ (-1)^a (a-1)!\end{aligned}$$

Quant à W_p, on l'obtiendra en faisant $x = 1$ dans la série entière

$$X_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p x^{n-1}}{n!},$$

laquelle se détermine, de proche en proche, au moyen de la relation de récurrence

$$X_p = X_{p-1} + x X'_{p-1},$$

sachant en outre que

$$X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$