Nouvelles annales de mathématiques

Émile Turrière

Sur l'intégration de l'équation d'Euler par des coniques sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 17-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__17_1>

[H2cβ]

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER PAR DES CONIQUES SPHÉRIQUES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE,
Professeur au Lycée de Poitiers.

1. L'intégrale générale de l'équation différentielle d'Euler,

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0.$$

dans laquelle $R(t)$ est un polynome du quatrième degré,

$$R(t) \equiv a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4,$$

(1) Et naturellement d'ordre non entier ($\neq 1$) comme dans ce qui précède.

est, d'après Stieltjes, de la forme

$$\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{2}a_1 & \lambda & 1 \\ \frac{1}{2}a_1 & a_2 - 2\lambda & \frac{1}{2}a_3 & -(x+y) \\ \lambda & \frac{1}{2}a_3 & a_4 & xy \\ 1 & -(x+y) & xy & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Des simplifications profondes se produisent lorsque le polynome $R(t)$ est simultanément bicarré et réciproque; en posant, en effet,

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = 1,$$

l'intégrale précédente se réduit à

$$\frac{(xy+1)^2}{1+\lambda} + \frac{(xy-1)^2}{1-\lambda} - \frac{(x+y)^2}{\frac{1}{2}a_2 - \lambda} = 0.$$

Considérons x et y comme étant les paramètres des génératrices isotropes d'une sphère de centre O et de rayon égal à l'unité, c'est-à-dire posons

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{x+y}{xy+1}, \\ p_2 = i\dfrac{y-x}{xy+1}, \\ p_3 = \dfrac{xy-1}{xy+1}; \end{cases}$$

la relation entre x et y entraîne une relation linéaire et homogène entre les carrés de p_1, de p_2 et de p_3; celle-ci peut être ramenée à la forme symétrique

$$(2) \qquad \frac{p_1^2}{a+\sigma} + \frac{p_2^2}{b+\sigma} + \frac{p_3^2}{c+\sigma} = 0,$$

par un simple changement de notations, en posant

$$a_2 = 2\frac{2c - a - b}{a - b},$$

$$\lambda = \frac{b - 2c - \sigma}{b + \sigma};$$

ainsi donc l'intégrale générale de l'équation d'Euler est réductible à la forme (2), au moyen de la transformation définie par les formules (1), dans le cas où le polynome R (t) est simultanément bicarré et réciproque, ce polynome pouvant être toujours égal à

$$(3) \qquad \mathrm{R}(t) \equiv t^4 - 2\frac{a + b - 2c}{a - b}t^2 + 1;$$

a, b et c désignent des constantes.

L'équation (2) représente, sur la sphère d'équation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1,$$

une famille dépendant du paramètre variable σ, de coniques sphériques, dont il est possible de donner diverses définitions.

On observera tout d'abord que les cônes représentés par l'équation (1) constituent une famille de cônes homofocaux; *les coniques sphériques* (2) *sont dès lors homofocales.*

2. Cherchons plus généralement la forme que doit avoir le polynome R (t), du quatrième degré pour que la transformation définie par les formules (1) fasse correspondre une conique sphérique à l'intégrale générale de l'équation d'Euler.

Afin d'éviter des calculs compliqués, j'appliquerai des résultats trouvés par M. Kœnigs, en utilisant un certain système de coordonnées introduit par M. Darboux; l'intégrale générale de l'équation d'Euler a été transformée par M. Kœnigs en une conique d'un faisceau tangentiel.

En posant

$$X = xy,$$
$$Y = x + y,$$

l'intégrale générale de l'équation d'Euler, attachée au polynome général du quatrième degré, est la conique $f(X, Y) = 0$ dont l'équation tangentielle est

$$(4)\quad a_4 u^2 + a_2 uw + a_0 w^2 - a_3 uv - a_1 wv + \lambda(uw - v^2) = 0,$$

en coordonnées homogènes.

En vertu des relations (1), on a les relations suivantes entre X, Y, p_1 et p_3 :

$$X = \frac{1 + p_3}{1 - p_3}, \qquad Y = \frac{2p_1}{1 - p_3};$$

introduisons des coordonnées ponctuelles X, Y, Z homogènes et considérons la transformation définie par les formules

$$(5)\qquad X = 1 + p_3, \qquad Y = 2p_1, \qquad Z = 1 - p_3.$$

Cette transformation fait se correspondre les courbes du plan (x, y, z) et de la sphère d'équation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1;$$

la transformée d'une conique quelconque d'équation

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

est une quartique biquadratique située sur la quadrique

$$A(1 + p_3)^2 + 4A'p_1^2 + A''(1 - p_3)^2 + 4Bp_1(1 - p_3)$$
$$+ 2B'(1 - p_3^2) + 4B''p_1(1 + p_3) = 0;$$

pour que cette biquadratique soit une conique sphérique, il est nécessaire et suffisant que, dans cette dernière équation, les termes en p_1 et en p_3 disparaissent ; il faut donc que les conditions

$$A - A'' = 0, \qquad B + B'' = 0$$

soient remplies ; ce sont les conditions qui en coordonnées (X, Y = 1, Z) expriment que la conique admet la droite

$$X + Z = 0,$$

pour axe de symétrie.

Si l'équation tangentielle de la même conique est

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

les conditions sont par conséquent

$$a - a'' = 0, \qquad b + b'' = 0 ;$$

en appliquant à la conique (4), on obtient ainsi

$$a_0 - a_4 = 0, \qquad a_1 + a_3 = 0 ;$$

de ces dernières formules résulte le théorème suivant

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation définie par les formules (1) *change en des coniques sphériques les courbes intégrales de l'équation d'Euler est que l'équation*

$$R(t) = 0$$

soit invariante dans la tranformation

$$t = -\frac{1}{\tau}.$$

Par analogie avec les polynomes réciproques (l'équation $R(t) = 0$ est résoluble en prenant $t - \frac{1}{t}$ pour inconnue), je dirai que le polynome $R(t)$ est alors *semi-réciproque*.

3. Plaçons-nous donc dans le cas

$$a_4 = a_0, \qquad a_3 = -a_1$$

d'un polynome semi-réciproque. Les coniques sphériques sont alors

$$(A + 2A' + B')p_1^2 + (A + B')p_2^2 + 2Ap_3^2 - 4Bp_1p_3 = 0;$$

l'équation tangentielle d'un cône, d'équation ponctuelle

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xz = 0,$$

est d'autre part

$$\beta\gamma u^2 + (\alpha\gamma - \delta^2)v^2 + \alpha\beta w^2 - 2\beta\delta uw = 0;$$

des relations

$$\begin{aligned}
\alpha &= A + 2A' - B', & a &= a'' = AA' - B^2,\\
\beta &= A + B', & a' &= A^2 - B'^2,\\
\gamma &= 2A, & b &= -b'' = -B(A + B'),\\
\delta &= -2B, & b' &= -B^2 - A'B',
\end{aligned}$$

on déduit l'équation tangentielle du cône

$$\beta\gamma(u^2 + v^2 + w^2) + 4av^2 + (2a - a' - 2b')w^2 - 4buw = 0$$

ou

$$\beta\gamma(u^2 + v^2 + w^2) - 4a_0v^2 + (2a_0 - a_2)w^2 + 2a_1uw = 0:$$

sous cette dernière forme, le paramètre λ n'intervient que par l'intermédiaire de $\beta\gamma$: les cônes considérés sont donc homofocaux au cône

$$4a_0v^2 + (2a_0 - a_2)w^2 + 2a_1uw = 0.$$

Cette même propriété peut être établie par le raisonnement suivant. Les formules (5) transforment la conique

$$Y^2 - 4XZ = 0$$

d'équation tangentielle

$$v^2 - uw = 0,$$

en le cercle $p_2 = 0$ de la sphère. Toute droite du plan est transformée en un petit cercle de la sphère, section par un plan parallèle à l'axe Op_2; toute tangente (u, v, w) à la conique

$$v^2 - uw = 0,$$

est transformée en un cercle de rayon nul ayant pour centre le point de la sphère dont les coordonnées sont

$$\xi = -\frac{2v}{u+w}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \frac{w-u}{w+u};$$

une courbe quelconque du plan est ainsi transformée en une courbe sphérique; celle-ci, puisque la transformation est ponctuelle et par conséquent de contact, peut être envisagée comme enveloppée par les cercles de la sphère qui sont les transformés des tangentes de la courbe plane. Parmi ces cercles, ceux qui correspondent aux tangentes communes avec la conique

$$v^2 - uw = 0$$

auront leur rayon nul. Une conique du faisceau tangentiel (4) étant tangente à quatre tangentes fixes de la conique précédente, la conique sphérique transformée sera tangente à quatre cercles de rayon nul fixes.

En posant

$$\delta^2 = a_1^2 - 8a_0^2 - 4a_0 a_2,$$

δ étant une quantité qui n'est pas nulle si $R(t)$ n'est pas carré parfait, on peut prendre pour coordonnées des tangentes fixes :

$$u - w = -a_1 \pm \delta,$$
$$u + w = \pm\sqrt{16a_0^2 + (a_1 \pm \delta)^2},$$
$$v = 2a_0;$$

en portant ces valeurs dans les expressions de ξ et de ζ on obtient quatre points du cercle $\eta = 0$ deux à deux diamétralement opposés. Les cônes de sommet O et qui définissent les coniques sphériques ont donc deux focales fixes dans le plan $p_2 = 0$.

Il résulte donc de ces considérations que, *lorsque les formules* (1) *associent des coniques sphériques aux intégrales de l'équation d'Euler, ces coniques sphériques sont nécessairement homofocales.*

4. Revenons maintenant au cas particulier initialement envisagé : celui où le polynome $R(t)$ est simultanément bicarré et réciproque et a la forme (3). L'intégrale a été transformée en la conique sphérique (2) qui reste homofocale à elle-même lorsque σ varie.

Il est alors possible de donner deux interprétations géométriques de l'équation d'Euler ressortissant à la Géométrie réglée.

En premier lieu, je rappellerai qu'à tout complexe de droites Sophus Lie associe une équation de Monge (ou de Pfaff) dont les intégrales sont les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe.

Au complexe tétraédral

$$a p_1 p_4 + b p_2 p_5 + c p_3 p_6 = 0,$$

attaché aux quadriques

$$\frac{X^2}{a+\lambda} + \frac{Y^2}{b+\lambda} + \frac{Z^2}{c+\lambda} = \text{const.},$$

Sophus Lie associe l'équation de Monge

$$(b-c)x\,dy\,dz + (c-a)y\,dz\,dx + (a-b)z\,dx\,dy = 0;$$

si l'on se propose de déterminer, sur la sphère de centre O et de rayon 1, les courbes du complexe tétraédral il suffit d'intégrer l'équation précédente où l'on a respectivement remplacé x, y et z par p_1, p_2 et p_3; on obtient ainsi

$$\Sigma a\, dp_1(p_2\, dp_3 - p_3\, dp_2) = 0; \tag{6}$$

en utilisant alors les formules (1) on est conduit à l'équation d'Euler avec le polynome (3). Ainsi donc *les courbes* (2) *ne sont autres que les courbes du complexe tétraédral situées sur la sphère.*

5. De même qu'à tout complexe de droites Sophus Lie associa une équation de Monge-Pfaff *particulière*, il est possible d'associer à toute équation de Monge-Pfaff un complexe *particulier* par la considération du problème de Transon (*cf.* le Chapitre III de ma Thèse *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné*, Paris, 1911).

D'une façon précise, étant donné un complexe invariant dans l'homothétie infinitésimale de pôle O, le problème de Transon, pour ce complexe d'équation

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = 0,$$

est équivalent à l'intégration sur la sphère

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

de l'équation de Monge-Pfaff

$$C(p_1, p_2, p_3, dp_1, dp_2, dp_3) = 0.$$

Il résulte de ces considérations que, pour le complexe associé à l'équation (6), le problème de Transon est *a priori* réductible à l'intégration de l'équation d'Euler. C'est ce que je vais établir directement.

6. Dans une Communication à l'Académie des Sciences *Sur les normales aux quadriques* (22 décembre 1890), M. G. Humbert a montré que les normales aux quadriques

$$\frac{X^2}{(b-\sigma)(c+\sigma)}+\frac{Y^2}{(c+\sigma)(a+\sigma)}+\frac{Z^2}{(a+\sigma)(b+\sigma)}-1=0.$$

dépendant du paramètre σ, engendrent un complexe du troisième ordre.

Plus particulièrement, les cônes homocycliques du second degré, d'équation

$$(a+\sigma)X^2+(b+\sigma)Y^2+(c+\sigma)Z^2=0,$$

définissent un complexe du troisième ordre qui n'est autre que le complexe des génératrices des quadriques homothétiques aux quadriques d'un faisceau homofocal; l'équation de ce complexe est

$$(7)\quad (b-c)p_1p_5p_6+(c-a)p_2p_6p_4+(a-b)p_3p_4p_5=0$$

ou encore

$$ap_4x_0+bp_5y_0+cp_6z_0=0,$$

en introduisant les coordonnées ordinaires (x_0, y_0, z_0) de la projection orthogonale de l'origine sur le rayon de coordonnées plückériennes $(p_1, \ldots, p_6)$.

Proposons-nous de résoudre le problème de Transon pour ce complexe. En se reportant alors à un article précédent [1] et appliquant les formules (5) et (7) de cet article

$$p_4=\frac{i}{2}(1+xy)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial y}-q\frac{\partial p_1}{\partial x}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_0=\frac{1}{2}(1+xy)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial y}+q\frac{\partial p_1}{\partial x}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

---

[1] *Sur certaines transformations de droites* (*Enseignement mathématique*, 1911, p. 363).

on trouve l'équation aux dérivées partielles

$$(8)\qquad p^2\mathop{\mathrm{S}}_1^3 a\left(\frac{\partial p_k}{\partial y}\right)^2 = q^2\mathop{\mathrm{S}}_1^3 a\left(\frac{\partial p_k}{\partial x}\right)^2,$$

dont dépendent les surfaces trajectoires du complexe, considérés comme enveloppes des plans

$$x(X - iY) + y(X + iY) + (xy - 1)Z = \varpi.$$

L'intégration de cette équation aux dérivées partielles (8) est équivalente à celle de l'équation différentielle du premier ordre

$$dx^2\mathop{\mathrm{S}}_1^3 a\left(\frac{\partial p_k}{\partial x}\right)^2 = dy^2\mathop{\mathrm{S}}_1^3 a\left(\frac{\partial p_k}{\partial y}\right)^2;$$

appliquant les formules qui donnent les dérivées partielles de p_1, p_2 et p_3, cette équation différentielle devient précisément l'équation d'Euler dans laquelle le polynome $R(t)$ a la forme (3).

Ainsi donc, conformément au paragraphe précédent, *la solution du problème de Transon, pour le complexe dégénéré du complexe de M. Humbert, dépend de l'intégration de l'équation d'Euler.*

L'équation générale des surfaces trajectoires orthogonales des droites du complexe est

$$\frac{p_1^2}{a + \Pi(\varpi)} + \frac{p_2^2}{b + \Pi(\varpi)} + \frac{p_3^2}{c + \Pi(\varpi)} = 0,$$

$\Pi(\varpi)$ désignant une fonction arbitraire de ϖ.

Les coniques sphériques (2) sont les courbes de contact avec la sphère des développables circonscrites à cette sphère et aux diverses surfaces trajectoires orthogonales de droites du complexe.

P.-S. — M. Cl. Guichard a eu la bonté de me signaler récemment que j'avais consacré plusieurs articles à une transformation de l'espace réglé déjà envisagée par Ribaucour, dans ses recherches sur les *congruences isotropes*, puis par Antomari, dans ses travaux sur les *surfaces réglées*. En remerciant M. Guichard, je m'empresse de porter cette remarque à la connaissance des lecteurs des *Nouvelles Annales* et de profiter de l'occasion pour indiquer quels sont les résultats que j'avais retrouvés.

Il s'agit de la transformation de droites, à laquelle j'avais été conduit à propos des *complexes de droites*, ainsi que je l'explique à la page 83 de ma Thèse *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné*, et que j'avais appliquée dans les articles suivants :

1° Sur une transformation de droites (*Nouvelles Annales*, juin 1909);

2° Sur les surfaces de M. Appell (*Nouvelles Annales*, juin 1910);

3° Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface eentrale (*Nouvelles Annales*, avril 1911);

4° Sur un complexe du quatrième ordre (*Nouvelles Annales*, mai 1911);

5° Sur certaines transformations de droites (*Enseignement mathématique*, septembre 1911).

Dans la première Note, j'avais signalé l'application de cette transformation de droites aux congruences isotropes de Ribaucour; dans la cinquième, j'avais remarqué qu'une représentation des congruences à laquelle on fait jouer un rôle à la projection d'un point fixe sur chaque rayon se rattache à la représentation la plus générale d'une congruence de droites par Ribaucour. Effectivement, l'illustre géomètre s'était occupé de cette transformation de droites, « mais d'une manière accessoire », selon l'expression d'Antomari : « Ribaucour s'était borné à la définir et à l'utiliser pour déduire une congruence isotrope d'une autre congruence isotrope ». Ribaucour avait d'autre part déterminé analytiquement les congruences de normales dont l'enveloppée moyenne est un point, c'est-à-dire les congruences de droites normales aux surfaces désignées par L. Bianchi, dans ses *Lezioni di Geometria differenziale*, sous la dénomination de surfaces de M. Appell.

Mais ce fut surtout Antomari qui, dans sa Thèse remarquable (*Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées; mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions*, Paris, 1894), étudia la même transformation de droites et l'appliqua à divers problèmes concernant notamment les surfaces développables et leurs transformées. Antomari signala des applications de cette transformation aux congruences; il étudia le cas du plan et de la congruence transformée; il établit que la congruence de normales la plus générale est transformée en la congruence la plus générale admettant le pôle pour enveloppée moyenne; il mit en évidence l'invariance des congruences de normales aux surfaces de M. Appell. Il fit enfin ressortir l'analogie de cette transformation avec la transformation de droites de M. Guichard, qui permet de déduire, de toute congruence de normales, une congruence dont la surface moyenne est un plan.