NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FOUCHÉ

Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales composés de cyclides

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 156-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__156_1>

[O[1]6p]

SUR LES SYSTÈMES DE SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONALES COMPOSÉS DE CYCLIDES;

Par M. Maurice FOUCHÉ,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

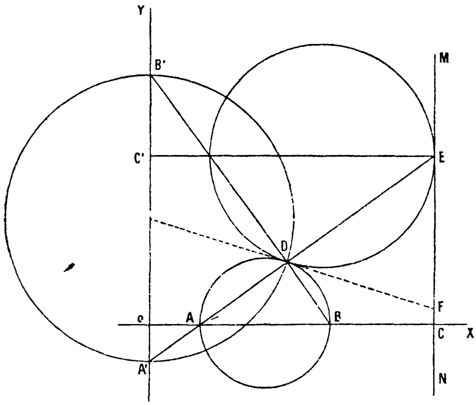
(FIN.)

---

26. *Relations métriques.* — Désignons par a, b, c les abscisses respectives des trois points A, B, C, situés sur l'axe OX (*fig.* 5); par a', b', c' les ordonnées des points A′, B′, C′, situés sur l'axe OY et qui jouent les mêmes rôles dans l'une des cyclides de la seconde famille; enfin par a'', b'', c'' les cotes des points analogues A″, B″, C″, situés sur l'axe OZ et correspondant à l'une des cyclides de la troisième famille.

1° Tous les cercles de diamètre A′B′, étant orthogonaux au cercle AB et à son symétrique par rapport à OY, admettent l'axe OX pour axe radical, et de plus

Fig. 5.



la puissance commune au point O par rapport à tous ces cercles a la même valeur absolue que celle de ce même point O par rapport au cercle AB, mais le signe contraire :

$$\mathrm{OA}' \times \mathrm{OB}' = -\,\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \qquad \text{ou} \qquad a'b' = -\,ab.$$

2° On a, par le théorème de Thales,

$$\frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OA}'} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AA}'} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AO}},$$

ce qui prouve que le rapport $\frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OA}'}$ reste invariable pour toutes les cyclides de la deuxième famille. On peut encore en déduire

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c-a}{-a},$$

qui, par multiplication avec l'équation précédente, donne

$$b'c' = bc - ab.$$

Il en résulte que les produits $a'b'$ et $b'c'$ restent constants pour toutes les cyclides de la deuxième famille. De même il y aura pour chaque famille deux produits analogues qui resteront invariables.

Posons

$$(1) \qquad ab = m, \qquad bc = n.$$

On aura pour la seconde famille

$$(2) \qquad a'b' = -m, \qquad b'c' = n - m.$$

On aura de même pour la troisième

$$(3) \qquad a''b'' = m - n, \qquad b''c'' = -n.$$

Rappelons aussi que chacun des trois rapports

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}, \quad \frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OA}'}, \quad \frac{\mathrm{OC}''}{\mathrm{OA}''}$$

est invariable.

Nous reviendrons plus loin sur les relations entre les valeurs de ces trois rapports.

On voit que le système orthogonal est complètement défini par les deux nombres m et n. Il est aussi défini, comme on vient de le voir, par une des trois coniques focales qui sont les lieux des points coniques, ce qui dépend aussi de deux paramètres.

27. *Cas particuliers.* — L'un des paramètres m ou n est remplacé dans l'une des deux autres familles par $m - n$ ou $n - m$. Les cas particuliers que nous voulons examiner sont ceux où l'un de ces paramètres est nul : $m = 0$, $n = 0$ ou $m = n$. Mais comme on peut toujours supposer que la famille qui a un paramètre nul est la première, et qu'on peut échanger les points A et B en considérant l'un ou l'autre des deux modes de génération de la cyclide par ses lignes de courbure cir-

culaires, il suffira de faire l'hypothèse

$$m = ab = 0.$$

Il peut alors se faire que ce soit le facteur a ou le facteur b qui soit nul.

Supposons d'abord

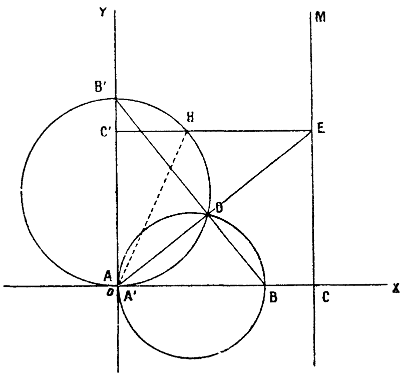
$$a = 0.$$

La figure 5 prend alors la disposition de la figure 6. On voit que le point A se confond avec le point A′, ce qui est conforme à l'équation

$$a'b' = -m = 0.$$

Quant aux cyclides de la troisième famille on les obtient en remplaçant dans la construction le point A par le point C, l'axe OY par l'axe OZ, et la droite CM par l'axe OZ. La figure 6 prend alors la disposition de

Fig. 6.



la figure 7. On voit que A″ coïncide avec C″, ce qui est conforme aux équations (3) qui deviennent

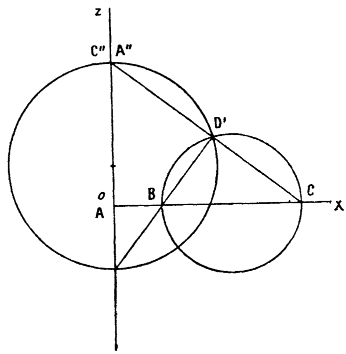
$$a''b'' = b''c'' = -n,$$

d'où

$$a'' = c'',$$

n n'étant pas nulle. C'est le point A″ qui est le centre de pivotement d'une des cyclides (C_3).

Fig. 7.



Alors les cyclides de la troisième famille, ayant leurs plans circonscrits confondus, se réduisent aux sphères orthogonales au cercle de diamètre BC situé dans le plan OXY et ayant leurs centres sur l'axe OZ, lesquelles passent nécessairement par un même cercle du plan OXY.

L'une des courbes focales est ce cercle de centre O situé dans le plan OXY, ce qu'on vérifie immédiatement sur la figure 6 où H est l'un des points coniques de la cyclide (C_2). On a $\overline{OH}^2 = OC' . OB' = b'c'$ qui est constant comme on l'a déjà vu.

Comme toutes les cyclides des deux premières familles doivent couper orthogonalement toutes les sphères du faisceau qui constitue la troisième, elles passent toutes par les deux sommets de ce faisceau qui sont ainsi deux points coniques communs à toutes ces cyclides. C'est à ces deux points situés sur l'axe OZ que se réduisent les deux autres focales.

On a

$$bc = b'c' = n.$$

Si n est positif, B et C sont du même côté de O qui coïncide avec A (*fig.* 6). Les cyclides des deux premières familles auront des points coniques imaginaires dans les plans autres que OXY, et dans ce plan-là les unes des points coniques imaginaires, les autres des points coniques réels, suivant que les points ABC ou A′B′C′ se succéderont dans l'ordre ABC ou ACB. Puisqu'il y a des points coniques réels, les sphères de la troisième famille coupent le plan OXY suivant un cercle réel. On reconnaîtra facilement que le rayon de ce cercle est égal à $\sqrt{n}$.

Si n est négatif, B et C sont de part et d'autre de A; les sphères coupent le plan OXY suivant un cercle imaginaire et les cyclides des deux autres familles ont toutes des points coniques réels sur l'axe OZ.

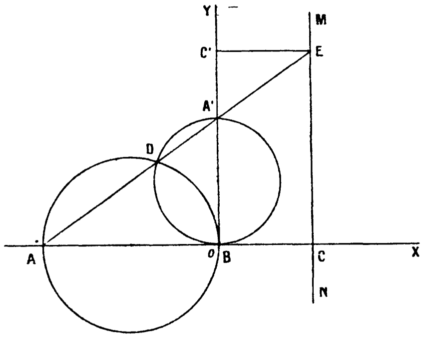
Si maintenant nous supposons $b = 0$, il résulte des équations (1) que m et n sont nulles, et par suite, en vertu des équations (2) et (3), b' et b''. Cela veut dire que toutes les cyclides du système passent par l'origine.

Dans la figure 5 il faut faire coïncider B avec O. Alors puisque le rapport $\frac{OC}{OA}$ est invariable, toutes les cyclides d'une même famille sont homothétiques et, cela étant vrai pour les trois familles, le système tout entier ne change pas si on lui fait subir une transformation homothétique avec O pour centre.

Une cyclide quelconque aura ses points coniques imaginaires si A et C sont de part et d'autre de B, et réels s'ils sont du même côté. A cause de l'homothétie, la même disposition se conservera dans toute une même famille, de sorte que chaque famille se compose soit de cyclides sans points coniques réels, soit de cyclides à points coniques réels sur un même axe radical.

Soient dans le plan OXY (*fig.* 8) les points A et C situés de part et d'autre de l'origine sur l'axe OX, et le

Fig. 8.



cercle de diamètre OA. Ce cercle et le point C définissent une cyclide de la première famille dont les points coniques sont imaginaires. Cette cyclide coupe le plan OYZ suivant deux droites OU et OU′, et puisque toutes les cyclides de la première famille sont homothétiques par rapport au point O, elles passent toutes par ces deux droites comme cela doit être, puisqu'elles doivent couper le plan OYZ suivant une même conique réduite ici aux deux droites OU et OU′.

Si alors nous appliquons la construction du n° 23, il faudra mener par A une sécante quelconque ADE qui coupe le cercle en D et, en E, la parallèle à OY menée par C. Le point A′ est à l'intersection de DE avec OY, et le point C′ est la projection de E sur OY. Alors l'une des cyclides de la deuxième famille sera définie par le cercle de diamètre A′B dans le plan OXY, et la droite EC′. Elle aura ses points coniques réels sur la perpendiculaire au plan OXY menée par A′; le lieu des points coniques des cyclides de cette seconde famille se composera des droites OU et OU′. Enfin, on verra de même que les cyclides de la troisième famille auront également leurs points coniques réels sur les mêmes droites. En résumé, le système se composera d'une famille sans points coniques réels et de deux familles à points coniques réels.

Si l'on avait supposé la première famille à points coniques réels on arriverait à la même conclusion, car cela fût revenu à prendre pour première famille celle que nous appelons la deuxième.

28. *Relations entre les trois rapports.* — On arrive encore à la même conclusion en cherchant les relations entre les trois rapports

$$\frac{OC}{OA}, \quad \frac{OC'}{OA'}, \quad \frac{OC''}{OA'}.$$

Posons

$$\frac{OC}{OA} = h, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{OA}{OC} = \frac{1}{h}.$$

La figure 5 donne pour le cas général

$$\frac{OC'}{OA'} = \frac{AE}{AA'} = \frac{AC}{AO} = \frac{AO - OC}{AO} = 1 - h.$$

Pour la troisième famille, il faut remplacer C par A, c'est-à-dire h par $\frac{1}{h}$. On aura donc

$$\frac{OC''}{OA''} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Finalement on a pour les rapports correspondant aux trois familles :

$$h \quad \text{et} \quad \frac{1}{h},$$

$$1 - h \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-h},$$

$$\frac{h-1}{h} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h-1}.$$

Si l'on pose

$$h' = \frac{1}{1-h}, \qquad h'' = \frac{h-1}{h},$$

on aura

$$hh'h'' = -1,$$

ce qui montre qu'il y a au moins un rapport négatif : supposons que ce soit h. Alors h' et h'' sont positifs. Donc il y a toujours un rapport négatif et deux positifs.

Dans le cas particulier où l'origine est en B, à une valeur négative de h correspondent des cyclides sans points doubles réels et inversement. Donc, dans ce cas particulier, il y a une famille de cyclides sans points doubles réels et deux autres à points coniques réels.

29. *Systèmes réversibles composés de cônes et de cylindres.* — Il reste à signaler le cas où la représentation sphérique est la même pour toutes les surfaces d'une même famille et où le trièdre reste immobile quand on fait varier l'un des paramètres, w par exemple Alors, dans la variation de w, les plans tangents à chacune des deux surfaces $u =$ const. et $v =$ const. restent les mêmes, et la ligne correspondante est droite puisque sa tangente reste invariable. Chacune de ces deux surfaces est donc développable. De plus c'est un cône ou un cylindre de révolution puisque les lignes de courbure de l'autre famille doivent être circulaires. Finalement le système se compose de deux familles de cônes de révolution orthogonaux de même sommet et de sphères concentriques ayant leur centre au sommet commun, ou bien de deux familles de cylindres de révolution orthogonaux autour du même axe, et de plans passant par cet axe.

30. *Tous les systèmes orthogonaux composés de cyclides dérivent par inversion des systèmes réversibles.* — Observons d'abord que si l'on transforme par inversion un système réversible on obtiendra bien un système orthogonal composé de cyclides qui, en général, ne sera plus réversible. Je dis qu'on peut obtenir par ce moyen tous les systèmes orthogonaux composés de cyclides.

Soit en effet un pareil système. On a déjà vu au n° 18 que tout point conique d'une cyclide étant un cercle de rayon nul est aussi un point conique d'une cyclide d'une autre famille, et qu'il appartient, en qualité de point ordinaire, à toutes les cyclides de la troisième famille. Ces remarques, et les conclusions qu'on en tire que toutes les cyclides d'une même famille passent par une même courbe et que les trois courbes ainsi obtenues sont focales l'une de l'autre, s'appliquent aussi bien aux systèmes non réversibles.

Si l'on considère les deux cyclides qui se coupent orthogonalement le long d'un cercle voisin du point conique, les cônes qui leur sont circonscrits le long de ce cercle seront aussi orthogonaux. Ils sont de révolution autour de l'axe de leur cercle d'intersection. Donc, à la limite, les cônes des tangentes au point conique dans les deux cyclides seront des cônes de révolution supplémentaires, ayant par conséquent le même axe.

Soit S_1 (*fig.* 9) le point conique commun à deux cyclides (C_2) et (C_3) des deux dernières familles ; S'_1 le deuxième point conique de la cyclide de la deuxième famille et S''_1 celui de la cyclide de la troisième famille. Nous supposons les droites $S_1S'_1$ et $S_1S''_1$ différentes. Soit aussi S_1X l'axe commun aux deux cônes des tangentes. Traçons les deux cercles SS'_1 et $S_1S''_1$ tangents à S_1X. Chacun d'eux fait le même angle avec tous les cercles de la cyclide correspondante passant par S_1 et S'_1 ou par S_1 et S''_1. Nous les appellerons les *cercles axiaux*.

Par chaque cercle de (C_2) passant par S_1 et S'_1 passe une cyclide (C_1) de la première famille qui coupe (C_3) suivant un cercle passant par S_1 et S''_1 et orthogonal au précédent. Or, les deux cônes des tangentes, de sommet commun S_1 étant supplémentaires, deux génératrices perpendiculaires de ces deux cônes sont dans un même plan avec l'axe commun S_1X. Soit (ω_2) un cercle de (C_2) passant par S_1 et S'_1. Le plan passant par S_1X et la tangente en S_1 à (ω_2) coupe le cône des tangentes de (C_3) suivant deux génératrices dont une seule est perpendiculaire à la tangente à (ω_2). Au cercle (ω_2) correspond donc, sur la cyclide (C_3), un cercle unique (ω_3) passant par S_1 et S''_1 et tangent à cette génératrice, et il y a une cyclide (C_1) passant par (ω_2) et (ω_3).

Les deux cercles axiaux, étant tangents entre eux, sont situés sur une même sphère (Σ) qui peut du reste se réduire à un plan, et dont le plan tangent en S_1 passe par S_1X. Cette sphère, passant par les deux points coniques de chacune des deux cyclides (C_2) et (C_3), les coupe chacune suivant deux cercles (n° 13) : (ω'_2), (ω''_2); (ω'_3), (ω''_3) qui sont orthogonaux deux à deux, puisque le plan tangent à (Σ) passe par S_1X. Par exemple, (ω'_2) est orthogonal à (ω'_3) et (ω''_2) à (ω''_3). De plus, toujours parce que le plan tangent à la sphère (Σ) passe par S_1X, cette sphère est orthogonale en S_1 à chacun des deux cônes des tangentes, et par suite orthogonale à chacune des deux cyclides (C_2) et (C_3) tout le long des cercles (ω'). Il en résulte que la sphère (Σ) est doublement circonscrite à chacune des deux cyclides (C'_1) et (C''_1) qui passent, l'une par (ω'_2) et (ω'_3) et l'autre par (ω''_2) et (ω''_3). Mais une cyclide ne peut être circonscrite à une même sphère le long de deux cercles de courbure de familles différentes, sans se réduire à la sphère elle-même. Donc les deux cyclides (C'_1) et (C''_1) se réduisent à la sphère (Σ).

Ainsi, chacune des trois familles de cyclides comprend une sphère. Ces trois sphères sont orthogonales et chacune d'elles est orthogonale à toutes les cyclides de chacune des deux familles à laquelle elle n'appartient pas. Les lignes focales, lieux des points coniques, sont situés sur chacune de ces sphères.

Prenons alors pour pôle d'inversion l'un des points communs aux trois sphères. Celles-ci vont se transformer en trois plans rectangulaires, dont chacun est orthogonal à deux familles de cyclides. Ce seront donc des plans de symétrie. Les axes des cyclides devant leur être perpendiculaires seront parallèles aux arêtes du trièdre trirectangle formé par ces trois plans. Donc, la représentation sphérique du système sera celle du système réversible, et le système lui-même sera réversible, car, pour qu'un système soit réversible, il suffit que sa représentation sphérique le soit et que toutes les lignes de courbure soient des cercles (n° 5).

Il convient de remarquer que si les trois sphères ont leurs points communs imaginaires, l'inversion et le système réversible seront aussi imaginaires.

31. *Cas particuliers.* — Supposons maintenant que les trois points S_1, S'_1, S''_1 soient en ligne droite et que l'axe commun des deux cônes des tangentes de sommet S_1 soit la droite S_1X différente de S_1, S'_1, S''_1. Le cône des tangentes en S_1 est symétrique par rapport au plan de symétrie contenant l'axe radical $S'S'_1$. Donc

son axe OX est dans ce plan-là. Donc le plan (P) contenant les deux droites $S_1 S'_1 S''_1$ et $S_1 X$ est un plan de symétrie commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3), et les deux cercles axiaux sont dans ce plan-là qui remplace la sphère du numéro précédent. La conclusion n'est pas changée.

Admettons enfin que l'axe $S_1 X$ coïncide avec la droite $S_1 S'_1 S''_1$, et que cette particularité se présente pour deux cyclides quelconques des deux dernières familles, afin qu'on ne puisse pas refaire le raisonnement précédent en choisissant deux autres cyclides.

On voit alors immédiatement que les deux cercles axiaux sont remplacés par la droite $S_1 S'_1 S''_1$. Les cercles infiniment petits situés dans le voisinage de S_1 ont leurs plans parallèles, ce qui rejette à l'infini l'un des axes radicaux de la cyclide. Donc, toutes les cyclides des deux dernières familles sont de révolution, et il faut que ce soit autour du même axe, puisqu'elles se coupent suivant des parallèles. La troisième famille se compose des plans méridiens.

Si l'on fait une inversion quelconque, les plans méridiens deviennent des sphères passant par un cercle fixe et formant par conséquent un faisceau. Les parallèles deviennent les cercles orthogonaux aux sphères du faisceau. Ils passent donc tous par les deux sphères de rayon nul du faisceau, et toutes les cyclides des deux dernières familles ont deux points coniques communs. Il en était donc de même des cyclides primitives. Alors une inversion avec l'un de ces points coniques comme pôle donnera deux familles de cônes de révolution orthogonaux et les sphères concentriques, ce qui est bien encore un système réversible.

32. *Systèmes orthogonaux admettant une famille*

de sphères et deux familles de cyclides. — Si l'on fait l'inversion en partant d'un système réversible général, on trouvera un système orthogonal composé de trois familles de cyclides avec trois courbes focales situées sur trois sphères dont une, deux, ou les trois peuvent se réduire à des plans. Les seuls cas particuliers à considérer sont ceux où une ou deux familles se réduisent à des sphères ou à des plans. Au lieu de les faire dériver par inversion d'un système réversible, il est préférable de les étudier directement. D'abord, toutes les sphères d'une même famille forment un faisceau, puisque chacune d'elles est orthogonale à une infinité de sphères dont chacune est circonscrite à l'une des cyclides des deux autres familles. Ensuite tout cercle de courbure d'une cyclide quelconque doit être orthogonal à toutes les sphères du faisceau et par conséquent passer par les deux sommets de ce faisceau, d'où il suit que toutes les cyclides admettent pour plan de symétrie le plan radical du faisceau des sphères. Enfin, les cyclides doivent couper ce plan radical suivant un réseau orthogonal. On peut alors construire le système orthogonal comme il suit :

Traçons dans un plan (P) un réseau orthogonal composé soit de cercles, soit de droites, et prenons deux points A et B réels ou imaginaires symétriques par rapport au plan P. Une cyclide quelconque de l'une des deux premières familles sera le lieu des cercles passant par A et B et s'appuyant sur une des lignes du réseau. La troisième famille est le faisceau des sphères comprenant les points A et B comme sphères de rayon nul. Il convient de remarquer que les cyclides des deux premières familles coupent le plan (P) suivant un deuxième réseau qui est l'inverse du premier par rapport au pied H de la droite AB sur le plan P avec un module égal à $-\overline{HA}^2$.

Si le réseau se compose de deux faisceaux de cercles, et qu'on prenne pour pôle d'inversion l'un des sommets de ce faisceau, on le transformera en un réseau composé de cercles concentriques avec leurs rayons, et nous aurons une famille de cyclides du troisième ordre. Si le réseau est formé de droites rectangulaires, toutes les cyclides seront du troisième ordre et l'on retrouvera le système réversible particulier, déjà signalé au n° 27.

Nous n'avons pas jusqu'ici distingué les inversions réelles ou imaginaires.

Si les points A et B sont réels on pourra prendre l'un d'eux pour pôle d'inversion, et le système sera transformé en un système réel formé de cônes de révolution orthogonaux de même sommet et de sphères concentriques.

Si les points A et B sont confondus au point H, chaque cyclide est le lieu d'une famille de cercles tangents en H à la droite perpendiculaire au plan (P) et l'inversion donne un système de cylindres de révolution orthogonaux ayant leurs génératrices parallèles, avec les plans perpendiculaires à ces génératrices.

Si enfin les points A et B sont imaginaires, toutes les sphères du faisceau coupent le plan (P) suivant un même cercle. En prenant pour pôle un point de ce cercle, on transforme le système en un autre comprenant deux familles de cyclides de révolution autour du même axe (tores ou cônes) avec leurs plans méridiens.

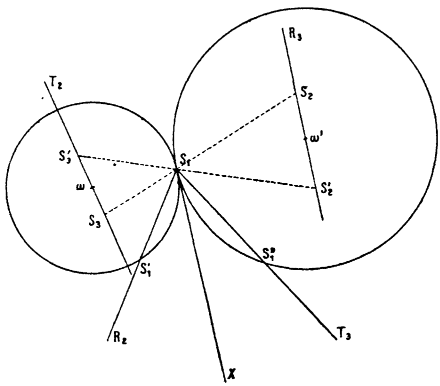
33. *Systèmes comprenant deux familles de sphères.* — On obtiendra un pareil système si l'axe radical d'un des faisceaux de cercles orthogonaux passe par le point H et si la puissance de ce point H par rapport aux cercles du faisceau est égale à $-\overline{HA}^2$. Ce système résulte en général de l'inversion du système composé 1° des cônes de même sommet S, de révolution

autour du même axe ; 2° des plans passant par cet axe ; 3° des sphères de centre S. Mais l'inversion contraire n'est réelle que si les points A et B sont réels. S'ils sont imaginaires, le système se transforme en un système de révolution défini en faisant tourner le réseau de deux faisceaux de cercles orthogonaux autour de l'axe d'un de ces faisceaux. L'un des faisceaux de cercles donne des sphères, l'autre des tores, et le système est complété par les plans méridiens.

Si enfin les points A et B se confondent le système inverse comprend des cylindres de révolution de même axe, leurs plans méridiens, et les plans de leurs sections droites.

34. *L'axe du cône des tangentes en un point conique d'une cyclide faisant partie d'un système triplement orthogonal est tangent à la courbe focale qui passe en ce point.* — Je terminerai ce travail par

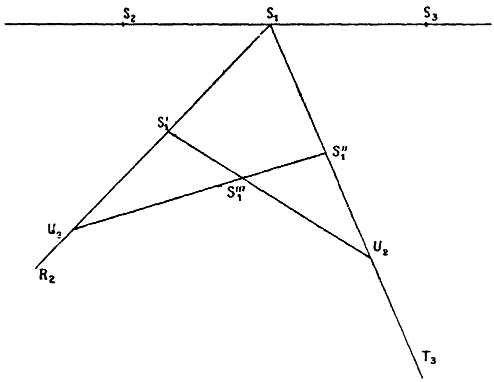
Fig. 9.



quelques remarques relatives aux systèmes orthogonaux composés de cyclides.

Soit S_1 (*fig.* 9 et 10) un point conique commun à deux cyclides (C_2) et (C_3) de la deuxième et de la troisième familles, (R_2) l'axe radical de (C_2) passant par S_1 sur lequel se trouve un autre point conique S'_1, (T_3) l'axe radical de (C_3) passant en S_1 sur lequel se trouve un autre point conique S''_1. Les cercles axiaux des deux cyclides passent respectivement par S_1 et S'_1 et par S_1

Fig. 10.



et S''_1 et sont tangents à une même droite S_1X qui est l'axe commun des deux cônes de révolution tangents à chacune des deux cyclides au point S_1. La sphère qui les contient fait partie de la première famille; elle est tangente à S_1X et contient la focale par où passent toutes les cyclides de cette première famille dont chacune coupe (C_2) et (C_3) respectivement suivant deux cercles orthogonaux passant l'un par S_1 et S'_1, l'autre par S_1 et S''_1.

Le plan tangent en S_1 à l'une de ces cyclides (C_1) doit être normal à chacun des deux cônes de sommet S_1 respectivement tangents aux deux cyclides (C_2) et (C_3). Donc, il passe par leur axe commun S_1X. Donc, la droite S_1X est tangente à toutes les cyclides (C_1) et par suite à la focale par où elles passent toutes.

35. *Lieux des axes radicaux; enveloppe des plans de symétrie des cyclides d'une même famille.* — Le plan (P) perpendiculaire à S_1X en S_1 contient le cercle de rayon nul S_1 commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3). Donc il contient aussi le second axe radical (T_2) de la cyclide (C_2) (*fig.* 9 et 10); mais celui-ci est encore dans le plan perpendiculaire à $S_1S'_1$ en son milieu et ce plan-là passe comme le plan (P) par le centre ω du cercle axial de la cyclide (C_1). Donc (T_2) est perpendiculaire au plan $S_1S'_1X$ de ce cercle axial et passe par son centre ω. Pour la même raison le second axe radical (R_3) de la cyclide (C_3) passe par le centre ω' du cercle axial $S_1S''_1$, et est perpendiculaire à son plan. Donc ces deux axes passent par le centre de la sphère (U_1) qui contient les deux cercles axiaux et qui est la sphère appartenant à la première famille.

De même, l'axe radical (R_2) passe par le centre de la sphère (U_3) appartenant à la troisième famille. Sur cet axe radical se trouvent les deux points coniques S_1 et S'_1 qui sont tous deux sur la focale (F_1), laquelle est située sur la sphère (U_1). Cette focale est une courbe du quatrième ordre puisque c'est l'intersection d'une sphère et d'une cyclide. Les droites (R_2) passant toutes par le centre de la sphère (U_3) engendrent un cône dont chaque génératrice coupe la focale en deux points. Donc ce cône est du second ordre et la focale (F_1) est l'intersection de la sphère (U_1) et du cône.

Cette même focale est aussi l'intersection de la sphère (U_1) et du cône engendré par (T_3), lequel a son sommet au centre de la sphère (U_2). Il en résulte que ces deux cônes ont leurs plans de symétrie parallèles et même qu'ils ont leurs quatre génératrices isotropes respectivement parallèles.

Le plan de symétrie de la cyclide (C_2) qui passe par (R_2) contient l'axe du cône des tangentes S_1X, mais S_1X est tangente à la focale (F_1) qui est sur le cône engendré par (R_2). Donc le plan de symétrie dont nous parlons est tangent au cône engendré par (R_2).

Pour la même raison, le plan de symétrie de la cyclide (C_2) passant par (T_2) enveloppe le cône décrit par (T_2) lequel a son sommet au centre de la sphère (U_1). De plus, ce plan de symétrie est perpendiculaire à (R_2). Donc le cône qu'il enveloppe est le cône supplémentaire du cône (R_2) ayant son sommet au centre de la sphère (U_1). Les deux cônes (R_2) et (T_2) sont donc supplémentaires et ont par conséquent leurs plans de symétrie parallèles. Finalement :

Les lieux des axes radicaux des cyclides se composent de six cônes du second ordre, deux pour chacune des trois familles. Ces cônes ont deux à deux le même sommet qui est le centre d'une des trois sphères du système. Les deux cônes qui correspondent à une même famille de cyclides sont supplémentaires. Ces six cônes ont leurs plans de symétrie parallèles. Enfin les plans de symétrie des cyclides sont les plans tangents à ces six cônes, chacun le long de la génératrice correspondante.

36. *Les directrices des focales.* — Tout point G d'une des trois focales (F_1) est un foyer de chacune des deux autres, c'est-à-dire que la sphère de rayon nul G est bitangente à chacune des focales (F_2) et (F_3). J'appelle *directrice* de (F_2) correspondant au foyer G, la droite qui joint les points de contact de cette sphère avec (F_2).

Considérons le point S_1 (*fig.* 9) comme foyer de la focale (F_2) située sur la sphère (U_2) et comprenant les points coniques S_2 et S'_2 de (C_3) situés sur l'axe radical (R_3), et cherchons la directrice correspondant à ce foyer.

La sphère de rayon nul S_1 touche la cyclide (C_3) suivant un cercle de rayon nul dont le plan est perpendiculaire à S_1X. La sphère (U_2) coupe ce cercle en deux points qui sont les points de contact cherchés. Or le cercle de rayon nul S_1 appartient à la famille des cercles de courbure de (C_3) qui admettent pour axe radical (R_3). Il passe donc par les deux points coniques S_2 et S''_2 (*fig.* 9, où l'on a représenté schématiquement les éléments imaginaires) situés sur cet axe. Ces points étant sur la sphère (U_2) sont les points de contact cherchés, et la directrice est la droite (R_3). On verra de même qu'au second point conique S''_1 de (C_3) situé sur (T_3) correspond le même axe radical (R_3). Donc :

A chacun des points coniques d'une même cyclide situés sur un même axe radical correspond, sur la focale qui comprend les deux autres points coniques de cette même cyclide, une même directrice qui n'est autre que le deuxième axe radical de la même cyclide.

Remarquons que le cercle de rayon nul S_1 se compose des deux droites isotropes S_1S_2, $S_1S'_1$ qui sont perpendiculaires à S_1X. De même l'axe S_2X_2 du cône tangent à la cyclide (C_3) au point S_2 est aussi perpendiculaire à S_1S_2. Enfin, la droite isotrope est perpendiculaire à elle-même. Donc les trois droites S_1X_1, S_2X_2 et S_1S_2 sont dans un même plan, ce qui prouve que les axes des deux cônes se rencontrent. En considérant les deux autres points coniques de la cyclide (C_3), on en déduit sans peine que *les quatre axes des cônes de révolution tangents à une cyclide aux quatre points coniques, passent par un même point de l'intersection des deux plans de symétrie.*

37. *Le groupe de six cyclides.* — Toutes les cyclides du système orthogonal se répartissent en groupes de six, de telle sorte que deux cyclides quelconques d'un même groupe ont un point conique commun.

Considérons toujours le point conique S_1 commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3). La cyclide (C_2) admet deux autres points coniques S_3 et S'_3 situés sur son axe radical (T_2). De même la cyclide (C_3) admet sur son second axe radical (R_3) deux points coniques S_2 et S'_2. Le cercle de rayon nul S_1 commun aux deux cyclides (C_2) et (C_3) doit passer par les 4 points coniques S_3 S'_3, S_2 et S'_2 ; mais il se compose de deux droites isotropes passant par S_1. Il faut donc que ces quatre points soient deux à deux alignés sur S_1. Par exemple, l'une des droites isotropes est $S_1 S_2 S_3$ et l'autre $S_1 S'_2 S'_3$.

Considérons maintenant la cyclide (C_1) qui a un point conique en S_3 commun avec (C_2). Elle admettra sur son autre axe radical deux autres points coniques σ_2 et σ'_2 et l'on démontrera comme précédemment que l'un de ces points, σ_2 par exemple, est sur la droite isotrope $S_1 S_3$. Mais S_1 est sur la focale (F_1), S_2 sur la fosale (F_2), S_3 sur (F_3) et σ_2 sur (F_2) ; σ_2 et S_2 sont donc tous deux sur la sphère (U_2). Or la droite isotrope $S_1 S_3$ ne rencontre la sphère (U_2) qu'en un seul point à distance finie, lequel est S_2. Donc σ_2 se confond avec S_2, et la cyclide (C_1) qui a déjà un point conique commun avec (C_2) en a un autre commun avec (C_3). En général, *si deux cyclides de familles différentes ont un point conique commun, toute cyclide de la troisième famille qui a un point conique commun avec l'une des deux en a aussi un commun avec l'autre.*

Ou encore : *Si deux cyclides de familles différentes ont chacune un point conique commun avec* *une cyclide de la troisième famille, elles ont un point conique commun.*

Avant d'aller plus loin, remarquons que deux cyclides de la même famille ne peuvent pas avoir un point conique commun appartenant à la même famille de lignes de courbure. En effet, les axes radicaux des deux cyclides ayant en commun le point S_1 devraient passer par le centre d'une même sphère. Donc ils coïncideraient. Mais cet axe radical ne rencontre qu'en deux points la sphère U_1 sur lequel se trouvent les points coniques d'indice 1. Donc les deux cyclides auraient non pas un, mais deux points coniques communs sur le même axe radical. Alors, à cause de l'orthogonalité avec les cyclides des deux autres familles, les cônes des tangentes en chacun de ces points coniques seraient identiques, et les deux cyclides coïncideraient.

Il y a deux cyclides de la première famille (C_1) et (C'_1) qui ont un point conique commun avec (C_2), par exemple (C_1) a le point conique commun S_3 et (C'_1) le point S'_3. Celles-là ont aussi chacune un point conique commun avec (C_3) savoir : (C_1) a S_2 et (C'_1) a S'_2. Considérons maintenant les deux cyclides (C_1) et (C_2) qui ont en commun le point conique S_3. Il y a une deuxième cyclide (C'_2) qui a un point conique commun S''_3 avec (C_1) et, puisque (C_1) en a un commun avec (C_3), (C'_2) en a un aussi commun avec (C_3), lequel, étant situé sur la focale (F_1), ne peut-être que S_1 ou S''_1; mais ce ne peut être S_1 puisqu'alors les cyclides (C_2) et (C'_2) auraient un point conique commun.

De même considérons les deux cyclides (C_1) et (C_3) qui ont en commun le point conique S_2. Il y a une deuxième cyclide (C'_3) qui a le point conique S''_2 commun avec (C_1) et, puisque (C_1) a un point conique commun avec (C_2), (C'_3) en a un commun avec (C_2), lequel ne peut être que S'_1.

On peut alors dresser le Tableau suivant dans lequel nous supprimons les parenthèses pour abréger, et où le symbole $\rightarrow$ veut dire : « ont un point conique commun qui est ».

$$\begin{array}{llll} C_2C_3 \rightarrow S_1, & C_2C_3 \rightarrow S_1, & C'_2C_3 \rightarrow S''_1, & C_2C'_3 \rightarrow S'_1, \\ C_3C_1 \rightarrow S_2, & C_3C'_1 \rightarrow S'_2, & C_3C_1 \rightarrow S_2, & C'_3C_1 \rightarrow S''_2, \\ C_1C_2 \rightarrow S_3. & C'_1C_2 \rightarrow S'_3, & C_1C'_2 \rightarrow S''_3, & C_1C_2 \rightarrow S_3. \end{array}$$

On voit que les cyclides (C'_2) et (C'_3) ont chacune un point conique commun avec (C_1). Donc, elles ont entre elles un point conique commun que nous désignerons par S'''_1, ce qui permet d'ajouter au Tableau précédent :

$$\begin{array}{l} C'_2C'_3 \rightarrow S'''_1, \\ C'_3C_1 \rightarrow S''_2, \\ C_1C'_2 \rightarrow S''_3. \end{array}$$

Considérons enfin la cyclide (C'_1) qui a en commun avec la cyclide (C_2) le point conique S'_3. Il y a une deuxième cyclide (C''_2) qui a avec (C'_1) un autre point conique commun S_3 ; puisque (C'_1) en a un commun avec (C_3), (C''_2) en a un aussi commun avec (C_3). Ce ne peut être que S_1 ou S'_1. Ce ne peut être S_1 parce qu'alors (C''_2) coïnciderait avec (C_2) et cette cyclide (C_2) aurait avec (C_1) les deux points coniques communs S'_3 et S_3. Donc c'est le point S'_1, et C''_2 coïncide avec (C'_2).

On démontrerait de même que toute cyclide, ayant un point conique commun avec l'une des trois cyclides (C') et différant des cyclides (C), coïncide avec une autre des cyclides (C').

Le groupe est alors constitué par les six cyclides (C_1), (C_2), (C_3), (C'_1), (C'_2), (C'_3), et l'on peu compléter comme il suit les Tableaux précédents :

$$\begin{array}{lll} C'_2C_3 \rightarrow S''_1, & C_2C'_3 \rightarrow S'_1, & C'_2C'_3 \rightarrow S'''_1, \\ C_3C'_1 \rightarrow S'_2, & C'_3C'_1 \rightarrow S'''_2, & C'_3C'_1 \rightarrow S''_2, \\ C'_1C'_2 \rightarrow S'''_3, & C'_1C_2 \rightarrow S'_3, & C'_1C'_2 \rightarrow S'''_3, \end{array}$$

ce qui montre bien que les six cyclides forment un groupe se partageant en huit sous-groupes de trois cyclides. Les trois points S appartenant à un même sous-groupe sont sur une même droite isotrope.

38. *Les douze axes radicaux et les trois quadrilatères plans.* — Les six cyclides du groupe admettent douze axes radicaux.

Tous ces axes radicaux doivent passer par l'un ou l'autre des centres des trois sphères (U_1), (U_2), (U_3). Bien que les droites isotropes soient imaginaires, représentons-les schématiquement sur la figure 10. Si l'on considère les points coniques d'indice 1 communs à deux cyclides d'indices 2 et 3, tels que S_1, S'_1, S''_1, S'''_1, on verra que les quatre axes radicaux $S_1 S'_1$, $S''_1 S'''_1$ appartenant aux cyclides (C_2) et (C'_2) et $S_1 S''_1$, $S'_1 S'''_1$ appartenant aux cyclides (C_3) et (C'_3) sont dans un même plan. Les quatre points S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 sont ainsi les quatre sommets d'un quadrilatère plan inscrit dans la focale (F_1), et dont les côtés opposés vont se couper aux centres des sphères (U_2) et (U_3). Il y a ainsi trois de ces quadrilatères. Par chacun des sommets de chacun d'eux passent deux droites isotropes dont chacune passe par deux sommets des autres quadrilatères, ce qui constitue les huit droites isotropes contenant les douze points coniques.

Par le centre de la sphère U_1 passent 4 axes radicaux dont deux appartiennent à une famille et deux à une autre. En combinant ceux qui n'appartiennent pas à une même famille, on trouve quatre plans contenant chacun deux droites isotropes. Il y a ainsi douze plans dont chacun contient deux droites isotropes.

La tangente à la focale qui contient le point S_1 en ce point est, comme on l'a vu au n° 35, perpendiculaire à chacune des deux droites isotropes qui passent en S_1. Comme une droite isotrope est perpendiculaire à elle-même, on en conclut que les tangentes aux focales en trois points en ligne droite S_1, S_2, S_3 sont dans un même plan.

Chacune des trois focales est une ligne double de la surface réglée, lieu des droites isotropes S_1, S_2, S_3, car, en chaque point S_1 d'une de ces focales, la surface réglée admet deux plans tangents qui sont déterminés par la tangente à la focale et chacune des génératrices isotropes. On peut alors déterminer l'ordre de cette surface réglée par le raisonnement suivant :

L'intersection de la surface avec le plan de l'infini se réduit au cercle de l'infini ; mais comme l'ordre de la surface dépasse nécessairement deux, ce cercle est une ligne multiple. Le degré cherché est donc pair. Supposons qu'il soit égal à $2n$. Le cercle de l'infini est une ligne de multiplicité n. La surface doit couper la sphère U_1 suivant une courbe d'ordre $4n$. Or l'intersection se compose : 1° de la focale, ligne double de la surface réglée qui doit compter dans le calcul du degré pour 8 unités puisqu'elle est de quatrième degré; 2° du cercle de l'infini qui doit compter pour $2n$ unités puisqu'il est du second degré et est une ligne de multiplicité n. On a donc l'équation

$$8 + 2n = 4n,$$

d'où $2n = 8$. La surface réglée, lieu des droites isotropes, est du huitième ordre.

Si le système est réversible, les trois sphères sont remplacées par trois plans rectangulaires que nous prendrons pour plans de coordonnées. A cause de la symétrie du système, les trois quadrilatères des points coniques deviennent trois rectangles situés dans ces plans coordonnés, ayant leur centre à l'origine et leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées. Le groupe des six cyclides se compose de trois cyclides et des cyclides symétriques de celles-là, chacune par rapport au plan de coordonnées qui n'est pas pour elle un plan de symétrie. Les six tores qui ont servi de point de départ à la construction du système réversible forment un de ces groupes.