Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 88-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__88_0>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Première question* (Cours). — *Énoncé du principe de d'Alembert. Montrer que, si le degré de liberté d'un système holonome est strictement égal à p, le principe de d'Alembert fournira les équations du mouvement de ce système sous la forme d'un système efficace de p équations différentielles du second ordre.*

Deuxième question (Problème de Cinématique). — *Le déplacement de glissement d'une figure plane solide étant supposé tel que deux points de la figure aient leurs trajectoires rectilignes, on demande :*

1° *De préciser les deux courbes de roulement relatives à ce déplacement et d'en déduire la représentation complète du déplacement considéré;*

2° *De déterminer la trajectoire d'un point quelconque de la figure;*

3° *D'indiquer tous les points de la figure dont la trajectoire est rectiligne ou circulaire.*

Troisième question (Problème de Dynamique). — *Une barre pesante appuie sans frottement, par ses deux extrémités, sur deux glissières fixes situées dans un même plan :*

1° *Déterminer et distinguer ses positions d'équilibre stable ou instable;*

2° *Calculer la période des petits mouvements de la barre autour d'une position d'équilibre stable.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Première question. — Une horloge et une montre marchent d'accord et marquent le temps solaire moyen; on les copie l'une et l'autre en les reconstruisant respectivement semblables de matières et de formes aux modèles primitifs mais en amplifiant* K *fois les dimensions linéaires homologues :*

Que vaudront (*en temps solaire moyen*) *la durée* *indiquée par la nouvelle horloge, la durée indiquée par la nouvelle montre?*

Deuxième question. — Une sphère homogène fixe et de rayon R *exerce autour d'elle une attraction newtonienne; elle produit en un point de sa surface une accélération* g *connue. Un point matériel venant de très loin sans vitesse initiale va pénétrer par un puits très étroit jusqu'au centre de la sphère; avec quelle vitesse y parviendra-t-il?*

Application numérique :

$g = 9,81$ *mètres-seconde par seconde,*

$R = 6366$ *kilomètres.*

(Novembre 1909.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Une tige matérielle* AB *peut librement tourner dans un plan horizontal autour d'un de ses points* A *qui est fixe.*

Une tige CD *sans masse peut librement tourner autour d'un de ses points* C *qui est fixé sur la même verticale que* A. *Cette tige porte une masse pesante* P *qui est fixée sur elle, mais peut être déplacée; elle est, en outre, assujettie à rencontrer constamment la tige* AB.

Toutes ces liaisons ont lieu sans frottement.

On demande d'étudier les divers mouvements du système suivant la position de la masse P *sur la tige* CD *et en supposant que le mouvement initial du système soit une simple rotation autour de la verticale* AC.

Épreuve pratique. — S, S' *étant les centres des deux bases d'un cylindre de révolution de rayon* R *et de hauteur* H, *déterminer un parallèle* C *de ce cylindre de telle façon que l'ellipsoïde central d'inertie du solide homogène limité par les deux cônes ayant* S, S' *pour sommets et* C *pour base commune soit une sphère.*

(Novembre 1909.)

Grenoble.

Problème. — *Deux sommets consécutifs* A, B *d'une plaque carrée homogène pesante glissent sans frottement* *sur une circonférence fixe, située dans un plan horizontal, de diamètre égal à la diagonale du carré.*

Former et intégrer autant que possible les équations du mouvement de la plaque.

Chercher si les données initiales peuvent être choisies de façon que le mouvement soit une rotation uniforme autour de l'axe de la circonférence.

Paramètres : ψ *angle que fait le côté* AB *du carré avec un rayon fixe* Ox_1 *de la circonférence,* θ *angle d'une demi-droite* Gz *normale à la plaque avec la verticale descendante* Oz_1.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une roue de rayon* R *reste dans un plan fixe et roule sur une droite fixe* O_1x_1, *sans glisser. Une tige homogène* OA *de masse* M *est fixée à la roue par ses extrémités, placées l'une au centre* O *de la roue, l'autre* A *sur la circonférence. On admet que les réactions qui peuvent s'exercer en* A *sont normales à* OA.

Soient θ *l'angle que fait* OA *avec* O_1x_1, Ox *le prolongement de* OA, Oy *un axe perpendiculaire à* Ox.

Supposant connue la variation de θ *en fonction du temps, on demande :*

1° *Les projections sur* Ox *et* Oy *de la vitesse et de l'accélération d'un point* P *de* OA, *on pose* $x = OP$;

2° *Les projections des réactions qui s'exercent en* O *et en* A *sur la base.*

3° *Application numérique. Calculer la valeur maximum de la réaction s'exerçant en* A *sachant que la barre pèse* 35^{kg}, *que le mouvement de* O *est uniformément retardé, sa vitesse passant en* 2 *minutes de* 72^{km} *à l'heure à zéro.*

4° *On immobilise brusquement la roue à un instant où* $\theta = \alpha$ *et* $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$. *Quelles sont les percussions de réaction s'exerçant en* O *et en* A? (Novembre 1909.)

Lille

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un corps solide mobile autour d'un point fixe subit successivement deux rotations finies; l'une de ces rotations se fait autour d'un axe* OA *et a une amplitude* α, *l'autre se fait autour d'un axe* OB *et a une* *amplitude* β. *Composer ces deux rotations et trouver la grandeur de l'angle de la rotation résultante :* 1° *en supposant les axes fixes dans l'espace;* 2° *en les supposant fixes dans le corps.*

II. *Établir les formules de Cayley qui donnent les composantes de la rotation instantanée d'un trièdre trirectangle mobile autour de son sommet, en fonction des paramètres d'Olinde Rodrigues fixant la position de ce trièdre par rapport à un trièdre fixe, et des dérivées de ces paramètres en fonction du temps.* (*Les formules d'O. Rodrigues sont supposées établies.*)

III. *Appliquer les équations de Lagrange à l'étude du mouvement d'un corps solide pesant, homogène, de révolution, fixé par un point de son axe et animé d'une rotation propre très grande autour de cet axe de figure qu'on abandonne sans vitesse. Calculer le rapport de la période de la nutation à la durée de révolution du corps autour de son axe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre droit à base elliptique, d'axes* $c = 1^{dm}$, $b = 2^{dm}$, *de hauteur* $h = 4^{dm}$, *est terminé par un demi-ellipsoïde admettant comme section principale une base du cylindre et comme troisième demi-axe* $a = 3^{dm}$. *Le système homogène et pesant, de densité* 1, *peut osciller librement autour du petit axe de la base libre, axe placé horizontalement. On écarte l'axe de figure de l'ensemble de* 60° *par rapport à la verticale descendante et on l'abandonne à lui-même. Quelle sera la durée d'une oscillation complète?* (Novembre 1909.)

Marseille.

COMPOSITION ÉCRITE. — *Dans un plan vertical on donne deux barres fixes, l'une* Ox *horizontale, l'autre* Oy *verticale.*

Une barre pesante et homogène, de longueur $2x$, *est placée verticalement et repose par son extrémité* A *sur la barre* Ox. *Elle est en équilibre instable. L'équilibre étant troublé, la barre tombe et vient heurter* Oy *par sa seconde* *extrémité B. Elle fait à ce moment un angle de 30° avec l'horizontale.*

Trouver, immédiatement avant et après le choc, la vitesse du centre de gravité de la barre et la vitesse angulaire de la barre.

Les corps sont mous et il n'y a pas de frottement.

SOLUTION.

Soient R et S les pressions en A et B au commencement du choc, u et v les composantes de la vitesse du centre de gravité G, $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de la barre.

On met l'indice o au début du choc et l'indice 1 à la fin. Soit

$$\int_{t_0}^{t_1} R\,dt = A, \qquad \int_{t_0}^{t_1} = B,$$

A et B sont les percussions en A et B évaluées en quantités de mouvement.

Avant le choc, les forces sont verticales, le centre de gravité décrit une verticale et l'on a $y = a\sin\theta$.

Le théorème des forces vives donne

$$Ma^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)\omega^2 = 2Mga(1 - \sin\theta).$$

Donc, au début du choc, pour $\theta = 30°$, on a

$$\frac{13}{12}\omega_0^2 = ga, \qquad \omega_0 = -2\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{ga} \qquad (\text{car } \omega_0 \text{ est négatif}),$$

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a\,\omega_0.$$

Si l'on applique, pendant la durée du choc, le théorème du centre de gravité et le théorème des moments, on a

$$M(u_1 - u_0) = B, \qquad M(v_1 - v_0) = A,$$

$$M\frac{a^2}{3}(\omega_1 - \omega_0) = \frac{1}{2}Ba - \frac{\sqrt{3}}{2}Aa;$$

d'où

$$\frac{2a}{3}(\omega_1 - \omega_0) = u_1 - u_0 - \sqrt{3}(v_1 - v_0).$$

A la fin du choc, la composante horizontale de la vitesse du point B est nulle de même que la composante verticale de la vitesse du point A. On a donc

$$u_1 + \frac{1}{2} a\omega_1 = 0, \qquad v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} a\omega_1 = 0.$$

On a donc

$$\frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_0) = -\frac{1}{2}\omega_1 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right),$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{13}{16}\omega_0.$$

On connaît donc ω_0, u_0, v_0, ω_1, u_1, v_1.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le câble d'un pont suspendu a* 100^{m} *de portée et* 8^{m} *de flèche. Il supporte un poids de* 1000^{kg} *par mètre courant.*

Trouver la longueur du câble et calculer sa section.

On fait travailler le fer à 20^{kg} *par millimètre carré.*

Quel serait l'accroissement de la flèche pour un accroissement de 10^{cm} *de longueur du câble ?*

(Novembre 1909.)