NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TURRIÈRE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1910). Mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 72-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__72_1>

AGREGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1910).

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES [1].

SOLUTION PAR M. TURRIÈRE.

Étant données deux quadriques P et Q, considérons une droite D dont les conjuguées D′ et D″ par rapport aux deux quadriques sont complanes : une telle droite D est l'intersection des plans polaires d'un même point par rapport aux deux quadriques, c'est-à-dire de deux plans qui se correspondent homographiquement: *les droites* D *constituent donc un complexe de Reye*. Lorsque le point de l'espace est sommet du tétraèdre conjugué commun des deux quadriques, ces plans sont confondus; par suite, toute droite de l'une quelconque des quatre faces du tétraèdre appartient au complexe, qui, dès lors, est *un complexe tétraédral attaché au tétraèdre conjugué commun des deux quadriques*.

Dans le cas actuel de deux paraboloïdes ayant même axe Oz et même sommet O, les plans polaires de tout point M de l'axe sont confondus suivant un plan qui

---

(1) *Voir* l'énoncé page 402 des *Nouvelles Annales* de 1910.

est normal à l'axe au point symétrique de M par rapport au point O. Toute droite orthogonale à l'axe appartient donc au complexe. On voit de même que toute droite rencontrant l'axe appartient au complexe. *Le complexe tétraédral dégénère donc en deux complexes linéaires spéciaux attachés respectivement à l'axe* Oz *et à la droite à l'infini des plans perpendiculaires à* Oz.

C'est ce cas de dégénérescence du complexe tétraédral qui faisait l'objet du problème proposé, problème dont je vais donner une solution analytique.

J'établirai tout d'abord une proposition fondamentale. Étant donné un paraboloïde équilatère Π, rapporté à des axes rectangulaires,

$$x^2 - y^2 - 2az = 0,$$

et une droite D de coordonnées plückériennes p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, les trois premières étant les coordonnées de direction, les coordonnées plückériennes de la droite Δ, conjuguée de D par rapport au paraboloïde Π, sont :

$$\varpi_1 = p_2, \qquad \varpi_2 = p_1, \qquad \varpi_3 = \frac{p_6}{a},$$

$$\varpi_4 = p_5, \qquad \varpi_5 = p_4, \qquad \varpi_6 = ap_3.$$

Faisons tourner, autour de Oz et d'un angle α, le paraboloïde Π, en laissant fixe la droite D ; l'équation du paraboloïde P ainsi obtenu s'établit en remplaçant respectivement x, y, z par

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z;$$

d'où l'équation du paraboloïde P :

$$(x^2 - y^2)\cos 2\alpha + 2xy\sin 2\alpha - 2az = 0;$$

les coordonnées plückériennes de la droite conjuguée D′ de D par rapport à ce paraboloïde P, sont :

$$
\begin{aligned}
p'_1 &= -p_1 \sin 2\alpha + p_2 \cos 2\alpha = \varpi_1 \cos(-2\alpha) + \varpi_2 \sin(-2\alpha),\\
p'_2 &= p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha = -\varpi_1 \sin(-2\alpha) + \varpi_2 \cos(-2\alpha),\\
p'_3 &= \frac{p_6}{a} = \varpi_3,\\
p'_4 &= -p_4 \sin 2\alpha + p_5 \cos 2\alpha = \varpi_4 \cos(-2\alpha) + \varpi_5 \sin(-2\alpha),\\
p'_5 &= p_4 \cos 2\alpha + p_5 \sin 2\alpha = -\varpi_4 \sin(-2\alpha) + \varpi_5 \cos(-2\alpha),\\
p'_6 &= a p_3 = \varpi_6.
\end{aligned}
$$

De ces expressions il résulte que, *lorsque le paraboloïde* Π *tourne d'un angle* α *autour de son axe* Oz, *la conjuguée d'une droite fixe* D *tourne de l'angle double.*

De cette remarque découlent immédiatement les deux premières parties du problème proposé. Deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P et Q, ayant même axe Oz et même sommet O, peuvent être considérés comme dérivant du paraboloïde Π d'équation

$$x^2 - y^2 - 2az = 0,$$

par rotations respectives α et $-\alpha$ autour de l'axe Oz; dans ces conditions, les droites conjuguées D′ et D″ d'une droite D s'obtiennent par rotations 2α et -2α de la conjuguée Δ par rapport au paraboloïde Π.

I. Pour que D′ et D″ soient complanes, il faut donc que Δ rencontre Oz ou bien lui soit orthogonale, et, par suite, que D soit orthogonale à Oz ou complane avec Oz.

La vérification analytique ne présente aucune difficulté; les coordonnées plückériennes de D′ et D″ sont, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
p'_1 &= -p_1 \sin 2\alpha + p_2 \cos 2\alpha, & p''_1 &= p_1 \sin 2\alpha + p_2 \cos 2\alpha,\\
p'_2 &= p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha, & p''_2 &= p_1 \cos 2\alpha - p_2 \sin 2\alpha,\\
p'_3 &= \frac{p_6}{a}, & p''_3 &= \frac{p_6}{a},\\
p'_4 &= -p_4 \sin 2\alpha + p_5 \cos 2\alpha, & p''_4 &= p_4 \sin 2\alpha + p_5 \cos 2\alpha,\\
p'_5 &= p_4 \cos 2\alpha + p_5 \sin 2\alpha, & p''_5 &= p_4 \cos 2\alpha - p_5 \sin 2\alpha,\\
p'_6 &= a p_3; & p''_6 &= a p_3;
\end{aligned}$$

l'expression

$$p'_1 p''_4 + p'_2 p''_5 + p'_3 p''_6 + p''_1 p'_4 + p''_2 p'_5 + p''_3 p'_6$$

se réduit à

$$4 p_3 p_6 \sin^2 2\alpha;$$

pour que D′ et D″ soient complanes, il faut donc : ou bien que p_3 soit nul (complexe des droites orthogonales à Oz), ou bien que p_6 soit nul (complexe des droites rencontrant Oz).

Puisque D′ et D″ s'obtiennent par rotations -2α et 2α d'une même droite Δ autour de Oz, ces droites D′ et D″ sont à la même distance de Oz et font avec Oz le même angle ; leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font l'angle 4α indépendant de la droite D.

II. Je désignerai par $p_1^k, p_3^k, \ldots, p_6^k$ les coordonnées plückériennes de la droite D_k. J'ai précédemment trouvé :

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= -p_1^1 \sin 2\alpha + p_2^1 \cos 2\alpha, & p_4^2 &= -p_4^1 \sin 2\alpha + p_5^1 \cos 2\alpha,\\
p_2^2 &= p_1^1 \cos 2\alpha + p_2^1 \sin 2\alpha, & p_5^2 &= p_4^1 \cos 2\alpha + p_5^1 \sin 2\alpha,\\
p_3^2 &= \frac{p_6^1}{a}, & p_6^2 &= a p_3^1;
\end{aligned}$$

on en déduit

$$p_1^2 + i p_2^2 = (p_2^1 + i p_1^1) e^{2i\alpha},$$

et une formule analogue pour p_4 et p_5.

Pour passer de la droite D_2 à la droite D_3 il suffit, dans les formules précédentes, de changer p_k^1 en p_k^2, p_k^2 en p_k^3 et α en $-\alpha$. On obtient ainsi

$$p_1^3 + ip_2^3 = (p_1^1 + ip_2^1)e^{-4i\alpha},$$

et une formule analogue pour p_4 et p_5 ; on a ensuite

$$p_3^3 = p_3^1, \qquad p_6^3 = p_6^1.$$

Ces formules expriment que la droite D_3 s'obtient en faisant tourner D_1 d'un angle 4α dans un sens déterminé. D_5 s'obtient par rotation de D_3 de 4α dans le même sens, et ainsi de suite. *Les droites* D_1, D_3, D_5, ..., D_{2p+1}, ... *sont donc génératrices d'un même hyperboloïde de révolution autour de* Oz *et elles se déduisent les unes des autres par une rotation déterminée.*

Pour obtenir la distribution de D_2, D_4, D_6, ..., D_{2p}, il suffit de remplacer D_1, D_3, D_5, ... par D_2, D_4, D_6, ..., et α par $-\alpha$. *Les droites* D_{2p} *sont ainsi génératrices d'un second hyperboloïde de révolution autour de* Oz *et elles se déduisent les unes des autres par une rotation déterminée, égale à la précédente mais en sens inverse.*

Une particularité intéressante se présente lorsque α est commensurable avec Π : dans ce cas, en effet, il y a un nombre fini de droites D_{2p+1} et un même nombre de droites D_{2p}. Pour chacun des hyperboloïdes, les traces des droites D_k sur tout parallèle sont les sommets d'un polygone régulier, convexe ou étoilé.

Il en est ainsi pour une droite quelconque de l'espace, choisie pour droite initiale D_1. Mais si l'on suppose que D_1 est une droite D satisfaisant à la première partie du problème, les deux hyperboloïdes de révolution dégénèrent l'un en un cône de révolution, l'autre en un plan qui rencontre orthogonalement Oz au point symétrique, par rapport à O, du sommet du cône. L'une des séries de droites est constituée de génératrices du cône; l'autre série est constituée de tangentes à un cercle d'axe Oz.

III. Pour que la question à traiter ait un sens, il faut dès maintenant exclure les droites D orthogonales à l'axe Oz et ne considérer que celles qui rencontrent cet axe.

Soit M le point de rencontre de D′, D″ et soient

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z$$

les coordonnées de ce point. La droite D est l'intersection des plans polaires de M par rapport aux paraboloïdes, ou encore des plans d'équations

$$(\mathrm{X}x - \mathrm{Y}y)\cos 2\alpha - a(\mathrm{Z} + z) = 0,$$
$$\mathrm{X}y + \mathrm{Y}x = 0:$$

nous prendrons pour coefficients directeurs de la droite D

$$p_1 = \cos\theta, \qquad p_2 = -\sin\theta, \qquad p_3 = \frac{r}{a}\cos 2\alpha;$$

le point M_1, où D rencontre Oz, a pour cote z_1,

$$z_1 = -z.$$

Soit φ l'angle de Oz et de D. On a, au signe près,

$$\cot\varphi = \pm\frac{r}{a}\cos 2\alpha;$$

de la condition imposée à D *de faire un angle constant avec* Oz *il résulte donc que* M *reste sur un cylindre de révolution d'axe* Oz *et de rayon*

$$r = a\left|\frac{\cot\varphi}{\cos 2\alpha}\right|.$$

Considérons les surfaces (S′), (S″) engendrées respectivement par D′ et D″, lorsqu'on impose la condition supplémentaire que ces surfaces font un angle constant en tout point de rencontre des deux droites D′ et D″. On a :

$$\begin{array}{ll} p'_1 = -\sin(\theta + 2\alpha), & p''_1 = -\sin(\theta - 2\alpha), \\ p'_2 = \cos(\theta + 2\alpha), & p''_2 = \cos(\theta - 2\alpha), \\ p'_3 = 0, & p''_3 = 0; \end{array}$$

définissant alors le plan tangent à (S′), au point M, par la droite D′ et par la tangente à la courbe lieu de M, on obtient, pour coefficients directeurs de la normale à (S′) en M, les expressions suivantes :

$$\cos(\theta + 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad \sin(\theta + 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad -r\sin 2\alpha;$$

et, par conséquent, les coefficients directeurs de la normale à (S″) au même point M sont :

$$\cos(\theta - 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad \sin(\theta - 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad +r\sin 2\alpha.$$

L'angle des deux surfaces au point M est donc défini par la relation

$$\cos V = \frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 \cos 4\alpha - r^2 \sin^2 2\alpha}{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + r^2 \sin^2 2\alpha};$$

V étant supposé constant, $\frac{dz}{d\theta}$ sera constant et par suite z et θ seront liés par une relation linéaire.

Le lieu de M *est donc une hélice circulaire.*

Le lieu de D *est un hélicoïde*, engendré par le déplacement hélicoïdal d'une droite rencontrant l'axe Oz.

Cherchons la condition demandée, moyennant laquelle l'hélice sera une courbe tracée sur cet hélicoïde. Les équations de l'hélice sont de la forme

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = k\theta + z_0;$$

quant à celles de l'hélicoïde lieu de D, elles sont de la forme

$$x = \rho\sin\varphi\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\psi,$$
$$z = \rho\cos\varphi + k\psi - z_0,$$

les deux paramètres variables étant ρ et ψ : la droite D rencontre, en effet, l'axe Oz au point M, de cote

$$z_1 = -z = -k\theta - z_0,$$

et ses coefficients directeurs sont

$$p_1 = \cos\theta, \qquad p_2 = -\sin\theta, \qquad p_3 = \cot\varphi.$$

On obtient ainsi une relation (N étant un nombre entier quelconque)

$$2z_0 \pm a\frac{\cot^2\varphi}{\cos 2\alpha} = k\pi \times N,$$

entre z_0, φ, α et k.

Les surfaces lieux de D′ et D″ sont deux surfaces qui se déduisent par rotations 2α et -2α de la surface lieu de Δ. Celle-ci est la polaire réciproque de l'hélicoïde engendré par D par rapport au paraboloïde Π. Cette surface engendrée par (Δ) est une surface à plan directeur, dont le paramètre de distribution $\frac{dz}{d\theta}$ est constant; elle est engendrée par le mouvement hélicoïdal de Δ, qui reste tangente à un cylindre de révolution autour de Oz. On reconnaît là un hélicoïde de M. Painlevé particulier; cette surface a été étudiée par M. A. Buhl, dans des Mémoires écrits spécialement pour les candidats à l'Agrégation et publiés dans les *Nouvelles Annales* (¹); M. Buhl a consacré le para-

---

(¹) A. Buhl, *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se* graphe 6 de son second Mémoire à la surface considérée et montré que ces asymptotiques sont situées sur des hyperboloïdes de révolution.

Les lignes de courbure de cette surface sont déterminables sans quadrature. En se reportant, en effet, à la page 212 des *Nouvelles Annales* de 1910, il résulte de ce que le contour apparent sur Oxy est un cercle et de ce que le paramètre de distribution est constant, que l'on peut poser, a et b étant des constantes,

$$\Psi_1 = a, \qquad \Psi_2 = b\psi,$$
$$\varpi = a\cos\varphi + b\psi\sin\varphi;$$

d'où l'on déduit [p. 197, formules (6)]

$$D = 0, \qquad D' = \frac{b}{\cos\varphi}, \qquad D'' = a\cos\varphi;$$

et, par suite, l'équation des images sphériques des lignes de courbure (p. 21) est

$$2\psi = \frac{a}{b}\varphi \pm \int\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{4}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi;$$

pour intégrer, il suffit de prendre $\tang\varphi$ comme variable.

---

déterminent par quadratures (octobre 1908, août 1909, septembre 1910).