J. HAAG

Sur une application de la théorie du trièdre mobile

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 67-69

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__67_1>

[O¹8c]

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DU TRIEDRE MOBILE;

PAR M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

Soit une courbe gauche (C), sur laquelle on a fixé un système d'abscisses curvilignes. Soit $Mxyz$ le trièdre principal relatif au point M d'abscisse curviligne s. Si l'on considère un point P d'abscisse curviligne $s+h$, les coordonnées x, y, z de ce point par rapport au trièdre précédent peuvent être développées en séries entières en h, pourvu que M ne soit pas un point singulier de (C) et que h soit assez petit. On sait qu'en appelant ρ et τ les rayons de courbure et de torsion relatifs au point M, les coefficients de ces séries s'expriment tous en fonction de ρ, τ et de leurs dérivées successives par rapport à s. Il existe différentes manières de calculer ces coefficients. En voici une qui n'est peut-être pas nouvelle, mais qui semble, en tout cas, assez peu connue.

Les développements cherchés peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a_1 h + \frac{a_2}{2} h^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} h^n + \ldots, \\ y &= b_1 h + \frac{b_2}{2} h^2 + \ldots + \frac{b_n}{n!} h^n + \ldots, \\ z &= c_1 h + \frac{c_2}{2} h^2 + \ldots + \frac{c_n}{n!} h^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Imaginons un mouvement du point M sur (C) tel que s soit le temps. Il est facile de voir que a_n, b_n, c_n sont les projections sur Mx, My, Mz de l'accélération $(n-1)^{\text{ième}}$ du point M. Or, étant donnés, d'une façon générale, un trièdre mobile $Oxyz$ et un point Q mobile par rapport à ce trièdre, il est facile de calculer, de proche en proche, les accélérations absolues successives de Q. Supposons, en effet, que l'on connaisse les projections $\gamma_{n,x}$, $\gamma_{n,y}$, $\gamma_{n,z}$ de l'accélération $n^{\text{ième}}$ sur Ox, Oy, Oz. Menons par un point fixe O_1 un vecteur $(O_1\Gamma_n)$ équipollent à cette accélération et un trièdre O_1xyz parallèle à $Oxyz$. L'accélération $(n+1)^{\text{ième}}$ est le vecteur vitesse du point Γ_n; on a donc les formules de récurrence

$$\gamma_{n+1,x} = \frac{d(\gamma_{n,x})}{dt} + q\gamma_{n,z} - r\gamma_{n,y}, \qquad \ldots.$$

Comme on a

$$\gamma_{0,x} = \frac{dx}{dt} + \xi + qz - ry, \qquad \ldots,$$

on voit qu'on pourra calculer $\gamma_{n,x}$, $\gamma_{n,y}$, $\gamma_{n,z}$, quel que soit n.

Appliquons ceci au trièdre $Mxyz$, le point Q étant en M. On aura les formules de récurrence

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n - rb_n, \\ b_{n+1} &= b'_n + ra_n - pc_n, \\ c_{n+1} &= c'_n + pb_n, \end{aligned}\right.$$

en appelant a'_n, b'_n, c'_n les dérivées de a_n, b_n, c_n par rapport à s. On a, en outre,

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad p = -\frac{1}{\tau}, \qquad r = \frac{1}{\rho}.$$

On possède donc tous les éléments nécessaires pour calculer, de proche en proche, tous les coefficients, a_n, b_n, c_n.

Indiquons les valeurs qui correspondent à $n = 1$, 2, 3, 4. On a immédiatement

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 1, & b_1 = 0, & c_1 = 0, \\
a_2 = 0, & b_2 = \dfrac{1}{\rho}, & c_2 = 0, \\
a_3 = -\dfrac{1}{\rho^2}, & b_3 = -\dfrac{\rho'}{\rho^2}, & c_3 = -\dfrac{1}{\rho\tau}, \\
a_4 = \dfrac{3\rho'}{\rho^3}, & b_4 = -\dfrac{\rho''}{\rho^2} + \dfrac{2\rho'^2}{\rho^3} - \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{1}{\rho\tau^2}, & c_4 = \dfrac{2\rho'}{\rho^2\tau} + \dfrac{\tau'}{\rho\tau^2}.
\end{array}$$

Comme application, on peut vérifier, par exemple, que le centre I de la sphère osculatrice a pour coordonnées $(0, \rho, -\tau\rho')$ et coïncide avec le point où la droite polaire touche son enveloppe. En substituant les développements (1) dans l'expression

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho y + 2\tau\rho' z$$

et annulant le coefficient de h^4, on obtient la *condition pour que la sphère osculatrice ait, avec la courbe, un contact du quatrième ordre;* on trouve sans difficulté

$$\tau^2\rho'' + \tau\tau'\rho' + \rho = 0.$$

Or, on vérifie facilement que *cette équation exprime aussi que le point* I *a une vitesse nulle*. Donc, *si une courbe a un contact du quatrième ordre avec chacune de ses sphères osculatrices, elle est sphérique*.