Concours d’admission à l’École normale supérieure et aux bourses de licence en 1911

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11 (1911), p. 558-576
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__558_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1911.

Composition de Mathématiques
(Sciences. — I).

On considère trois axes rectangulaires $Oxyz$ *et la surface de révolution, appelée* tore, *dont l'équation est*

$$(x^2+y^2+z^2+l^2\cos^2\theta)^2 = 4l^2(x^2+y^2),$$

l étant un nombre positif et θ un angle aigu.

1° *On coupe le tore par le plan* $z = x\,\mathrm{tang}\,\theta$. *Former l'équation de la section dans son plan et vérifier que cette section se compose de deux circonférences* c *et* γ, *ayant leurs centres sur* Oy. *Les projections de ces circonférences sur le plan* xOy *admettent le point* O *pour foyer.*

On déduit facilement de là qu'il existe sur le tore, à part les parallèles et les méridiens, deux systèmes de circonférences : les circonférences C *et les circonférences* Γ. *Montrer que deux circonférences d'un* *même système* (C *ou* Γ) *ne se coupent jamais, que deux circonférences de systèmes différents* (C *et* Γ) *ont toujours deux points communs.*

2° *Trouver les courbes* K *qui coupent tous les parallèles du tore sous un angle donné* V. *Construire la projection de ces courbes sur le plan* xOy, *d'abord pour* $V = \theta$, *puis pour* $\operatorname{tang} V = 2 \operatorname{tang} \theta$. *Comment peut-on déduire la seconde courbe de la première et, d'une manière plus générale, comment peut-on construire point par point les courbes* K?

3° *Former l'équation générale des sphères* s *passant par l'une des circonférences* C, *trouver le lieu des centres de ces sphères et montrer que chacune d'elles contient aussi une circonférence* Γ.

Montrer que toutes les sphères s *passant par un point* a *passent aussi par un point associé* a'.

4° *On donne deux points* a *et* b *non situés sur le tore;* b *est différent de* a *et de son associé* a'. *Soit* C_0 *l'une des circonférences* C. *Par* C_0 *et* a *passe une sphère* A_0 *qui coupe le tore suivant une circonférence* Γ_0. *Par* Γ_0 *et* b *passe une sphère* B_0 *qui coupe le tore suivant une circonférence* C_1. *Par* C_1 *et* a *passe une sphère* A_1 *qui coupe le tore suivant une circonférence* Γ_1. *Par* Γ_1 *et* b *passe une sphère* B_1 *qui coupe le tore suivant une circonférence* C_2, *et ainsi de suite.*

On étudiera dans deux cas particuliers à quelle condition la suite des circonférences $C_0, C_1, C_2, \ldots$ *est périodique.*

Supposant d'abord a *et* b *sur* Oz, *on montrera que les centres des sphères* A_i *et* B_i *sont alors dans deux plans dont on se donnera les équations sous la forme*

$$z = l \cos\theta \operatorname{tang}\alpha, \qquad z = l \cos\theta \operatorname{tang}\beta.$$

Quelle relation doit-il y avoir entre α *et* β *pour que* $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ *étant différentes,* C_n *soit identique à* C_0? — *Calculer algébriquement le rapport* $u = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}$ *dans le cas où* $n = 10$.

En second lieu, on prendra les valeurs suivantes pour les coordonnées de a *et de* b :

$$a(x = l\cos\theta\cos A,\ y = l\cos\theta\sin A,\ z = 0);$$
$$b(x = l\cos\theta\cos B,\ y = l\cos\theta\sin B,\ z = 0).$$

Montrer que si C_0 *est identique à* C_n *pour un choix particulier de* C_0, *il en est de même quelle que soit* C_0, *et trouver la relation de position entre* a *et* b *pour laquelle cette circonstance se produit.*

SOLUTION PAR M. H. L.

La surface proposée S est engendrée par les circonférences d'équation

$$x^2 + z^2 + l^2\cos^2\theta = \pm 2lx$$

du plan Oxz en tournant autour de Oz. Ces circonférences ont leurs centres sur Ox à la distance l de O; leur rayon est égal à $l\sin\theta$; elles sont vues de l'origine sous l'angle 2θ. Le plan $z = x\operatorname{tang}\theta$, perpendiculaire au plan Oxz, a pour trace sur ce plan une tangente commune intérieure à ces deux circonférences; c'est donc un plan bitangent au tore.

Si l'on rapporte les points de ce plan bitangent P à sa trace $O\xi$ sur le plan Oxz et à l'axe des y et comme axes, on a les formules

$$x = \xi\cos\theta, \qquad y = y, \qquad z = \xi\sin\theta.$$

L'équation de la section de S par P, rapportée aux axes $O\xi y$, est donc

$$(\xi^2 + y^2 + l^2\cos^2\theta)^2 = 4l^2(\xi^2\cos^2\theta + y^2)$$

ou

$$(\xi^2+y^2-l^2\cos^2\theta)^2=4l^2y^2\sin^2\theta,$$
$$\xi^2+y^2-l^2\cos^2\theta\quad=\pm 2ly\sin\theta.$$

La section est donc constituée par deux circonférences c et γ de rayon l et dont les centres sont sur Oy à la distance $l\sin\theta$ de O. Il résulte immédiatement de là que c et γ se coupent sous l'angle 2θ, ou, d'une façon plus précise, que c et γ coupent sous l'angle θ les parallèles passant par les points de tangence de P et de S.

En projection sur Oxy les équations de c et γ sont, d'après les formules de transformations,

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}+y^2-l^2\cos^2\theta=\pm 2ly\sin\theta,$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{\cos^2\theta}&=y^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\pm 2ly\sin\theta+l^2\cos^2\theta\\&=(y\tang\theta\pm l\cos\theta)^2.\end{aligned}$$

Donc *le point* O *est un foyer pour ces projections.*

Faisons tourner le plan P d'un angle quelconque autour de Oz; P vient en P_1, c en c_1, γ en γ_1; c_1 et γ_1 sont sur le tore S, toutes les circonférences telles que c_1 forment la famille C, les circonférences telles que γ_1 forment la famille Γ. Quant à P_1 c'est l'un quelconque des plans bitangents au tore, c'est-à-dire tangent au tore en deux points et deux points seulement.

Soit M un point du tore; le parallèle contenant M coupe P en deux points symétriques par rapport à $O\xi$ et situés sur c et γ. Mais $O\xi$ n'est pas un diamètre ni de c ni de γ; donc l'un de ces deux points m est sur c, l'autre μ est sur γ. La seule circonférence de C passant par M s'obtient donc en effectuant sur c la rotation autour de Oz qui amène m en M. De même on trouve la seule circonférence de Γ qui passe par M. Donc : *par* *tout point du tore passe une circonférence de* C *et une seule, une circonférence de* Γ *et une seule.* Par suite *deux circonférences d'un même système ne se rencontrent jamais*, et l'on voit aussi par cela même que les deux systèmes sont bien différents.

Soient maintenant deux circonférences c_1 et γ_1 respectivement de C et de Γ. c_1 rencontre le plan P_1 de γ_1 en deux points qui sont réels, car l'intersection des plans de c_1 et de γ_1 passe par O, point intérieur à c_1. La section de S par P_1 se compose de γ_1 et d'une circonférence de la famille C qui, par suite, ne rencontre pas c_1; donc les points de rencontre de c_1 et de P_1 sont sur γ_1. Et l'on voit que *deux circonférences de systèmes différents se coupent toujours en deux points réels.*

Cette première partie est connue sous le nom de *théorème d'Yvon Villarceau;* on la démontre le plus souvent en remarquant que le cercle à l'infini étant courbe double pour S, tout plan bitangent à S coupe S suivant une quartique ayant quatre points multiples : les points cycliques et les points de tangence. Trois de ces points n'étant pas en ligne droite, la section se compose de deux coniques, qui sont des cercles puisqu'elles passent par les points cycliques.

Une autre démonstration consiste, appelant U et V les points de rencontre des cercles méridiens avec Oz, à faire une inversion de centre U. Le tore devient un cône dont le sommet est l'homologue V′ de V. P devient une sphère P′ bitangente au cône et qui, par suite, le coupe suivant deux circonférences de systèmes différents et dont les plans ne sont pas perpendiculaires à Oz. Ce mode de raisonnement, qui permettrait aussi de voir les situations respectives des systèmes C et Γ et de résoudre les deuxième et troisième parties, a l'inconvénient d'obliger à raisonner sur des éléments imaginaires assez compliqués; par exemple, les circonférences intersections de P′ et du cône sont en même temps des paraboles, elles sont dans des plans isotropes.

Une autre démonstration, moins rapide mais plus instructive, est la suivante : puisque toutes les normales du tore rencontrent Oz, toute sphère bitangente à S, sans être tangente en plus de deux points à S, est coupée par le plan méridien de son centre suivant une circonférence dont Oz n'est pas un diamètre et qui est tangente aux deux circonférences méridiennes; donc la puissance de cette sphère par rapport au point O est égale à $-l^2\cos^2\theta$, d'après les propriétés connues des circonférences tangentes à deux autres. Le lieu des centres de ces sphères bitangentes est coupé par un plan méridien suivant le lieu des centres des circonférences dont il vient d'être parlé et qui sont tangentes à deux circonférences méridiennes. Ce dernier lieu est une hyperbole d'axe non transverse Oz, donc le lieu des centres des sphères est un hyperboloïde H à une nappe et de révolution autour de Oz.

Ceci étant, soit M un point du tore, s le centre de la sphère bitangente à S en M et en un autre point M'. Au point M de S faisons correspondre le point s de H et à s de H nous faisons correspondre M et M'. A une courbe λ décrite par s correspondra une ou deux courbes situées sur S et sur l'enveloppe des sphères de centre s et de puissance $-l^2\cos^2\theta$ par rapport à O. Or, si λ est une droite, toutes les sphères considérées passent par un même cercle qui a son centre sur λ et dont le plan qui passe par O est perpendiculaire à λ. Ce cercle est réel si λ est réelle, car sa puissance par rapport à O est négative. C'est ce cercle qui correspondra à la droite λ. Or il y a sur H deux familles de génératrices, d'où deux familles de cercles sur le tore S.

Je laisse au lecteur le soin de voir que cette transformation qui fournit évidemment la solution de la troisième partie, donne les relations indiquées par l'énoncé entre les familles C et Γ.

La proposition est aussi susceptible de diverses démonstrations élémentaires, en général très artificielles. J'en indique cependant une, qui n'est d'ailleurs qu'une vérification, parce qu'elle est en rapport avec le raisonnement fort connu de M. Courcelles sur la projection du cercle.

Soit, dans un plan P, une circonférence c de centre A et de rayon l, projetons-la orthogonalement sur le plan xOy. Nous supposons que Oy passe par A et que O soit un foyer de la projection; de sorte que si θ est l'angle des deux plans, on a

$$OA = l\sin\theta.$$

Soient M un point de c, m et P ses projections orthogonales sur Oxy et sur Oy; soit OI perpendiculaire sur AM. (Le lecteur est prié de faire la figure.) On a

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MP}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{MP}},$$

à cause des triangles semblables AOI, AMP; donc $\mathrm{IO} = \mathrm{M}m$. Et, par la considération des triangles MIO, MmO on voit que $\mathrm{IM} = \mathrm{O}m$. C'est le raisonnement de M. de Courcelles.

Sur Om portons $\mathrm{O}\omega = \mathrm{OM} = l$, alors $m\omega = \mathrm{AI}$; donc les triangles AOI, M$m\omega$ sont égaux et $\mathrm{M}\omega = l\sin\theta$. Donc la surface S engendrée par la rotation de c autour de la perpendiculaire Oz à Oxy peut aussi être engendrée par la rotation autour de Oz d'une circonférence située dans le plan méridien Ozm de rayon $\mathrm{M}\omega = l\sin\theta$ et dont le centre ω est à la distance l de O.

On aperçoit aussi en particulier la propriété signalée d'après laquelle O est le foyer de la projection de c. La raison profonde de ce fait tient à la constitution du tore ou pour mieux dire de toute surface de révolution. On voit, en effet, facilement que les parallèles de rayon nul des points U et V précédemment considérés doivent être compris dans le contour apparent du tore en projection sur Oxy. Et c, par exemple, rencontre chacun de ces parallèles.

2. Fixons la position d'un point M sur le tore par les coordonnées polaires ρ, ω de sa projection sur Oxy et soit s l'arc du méridien qui le contient compté dans un sens fixé à partir de l'un de ses points de rencontre avec Oxy; ρ et s sont liés par une relation connue. L'équation différentielle des courbes demandées est

$$\operatorname{tang} V = \frac{ds}{\rho\, d\omega}.$$

Si l'on appelle α l'inclinaison du rayon du méridien de M avec le plan Oxy, on a

$$\rho = l + l\sin\theta\cos\alpha, \qquad ds = l\sin\theta\, d\alpha.$$

On peut déduire de là une relation différentielle entre α et ω qui s'intègre facilement ; mais il est plus rapide de former l'équation entre ρ et ω. On a

$$d\rho = -l \sin\theta \sin\alpha\, d\alpha = -\sin\alpha\, ds;$$

donc

$$\left(\frac{\rho - l}{l \sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 1$$

ou

$$\left(\frac{\rho - l}{l \sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{\rho \operatorname{tang} V\, d\omega}\right)^2 = 1.$$

Posons $u = \frac{1}{\rho}$, l'équation devient

$$\left(\frac{1 - lu}{l \sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{du}{\operatorname{tang} V\, d\omega}\right)^2 = u^2$$

ou

$$\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 + \operatorname{tang}^2 V \left[\frac{u^2}{\operatorname{tang}^2\theta} - \frac{2u}{l \sin^2\theta} + \frac{1}{l^2 \sin^2\theta}\right] = 0:$$

$$\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta}\right)^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{l^2 \cos^4\theta} - \left(u - \frac{1}{l \cos^2\theta}\right)^2\right].$$

Et enfin

$$\frac{\frac{l \cos^2\theta}{\sin\theta}\, du}{\sqrt{1 - \left(\frac{l \cos^2\theta\, u - 1}{\sin\theta}\right)^2}} = \pm \frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta}\, d\omega,$$

$$\frac{l \cos^2\theta}{\rho} = 1 + \sin\theta \cos\left[\pm \frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta}(\omega - \omega_0)\right].$$

Telle est l'équation polaire des projections $\mathcal{K}(V)$ des courbes K demandées.

Pour $V = \theta$, on reconnaît les ellipses projections des circonférences C et Γ.

Pour $\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta} = 2$, on a des courbes que je laisse au lecteur le soin de tracer, et qui se déduisent des ellipses $\mathcal{K}(\theta)$, en faisant correspondre à chaque point M d'une telle ellipse le point m ayant même ρ et ayant un angle polaire moitié de celui de M.

D'une façon générale, si M de coordonnées ρ, ω

décrit une courbe $\mathcal{K}(\theta)$, le point M′ de coordonnées ρ', ω',

$$\rho' = \rho, \qquad \omega' = A\omega + B,$$

A et B étant deux constantes, décrit une courbe $\mathcal{K}\left(\frac{\tang \theta}{A}\right)$.

La construction des tangentes aux courbes $\mathcal{K}$ résulte de suite de la définition des courbes K.

Les relations entre les diverses courbes $\mathcal{K}$ se voient tout aussi bien sur l'équation différentielle $\rho \tang V d\omega = ds$, et cela montre qu'elles subsistent sur toute surface de révolution.

Ainsi, sur une surface de révolution, il suffit de connaître une courbe $K(V_0)$, pour une valeur particulière V_0 de V, pour en déduire sans intégration toutes les courbes $K(V)$. Pour traiter géométriquement la deuxième partie, il va suffire de prouver que les courbes C et Γ sont des courbes $K(\theta)$.

On a déjà vu que les cercles C et Γ coupent sous l'angle θ les parallèles lieux des points de tangence des plans bitangents au tore. Soient λ l'un de ces parallèles, λ′ un autre parallèle quelconque; soient a et a' les points de rencontre de λ et λ′ et d'un même demi-plan méridien.

Il existe une inversion dont le centre est sur Oz, et qui change a en a'; elle change λ en λ′ et le tore reste inaltéré. Elle change donc les circonférences C et Γ en circonférences situées sur le tore, et qui sont des circonférences Γ et C, car considérons, par exemple, la sphère invariable dans l'inversion et qui passe par la circonférence c. Cette sphère ne coupe le tore S à distance finie que suivant c, et la circonférence γ' symétrique de c par rapport au plan méridien contenant le centre de S; donc cette circonférence γ', qui est une circonférence Γ, est l'inverse de c. Par suite, les circonférences C et Γ coupent λ et λ′ sous le même angle θ.

Cette proposition est aussi susceptible d'une vérification très élémentaire. Reprenons les notations employées plus haut, et soit MT la tangente en M à c; T est sur OA; soit TB perpendiculaire sur Om.

Utilisant les résultats précédents et les similitudes des triangles OmP, OTB et AMT, AIO, MPT, on a

$$\frac{TB}{mP} = \frac{OT}{Om} = \frac{OT}{IM} = \frac{AT}{AM} = \frac{MT}{MP};$$

donc les deux triangles rectangles MPm et MTB sont semblables; l'angle MTB est donc égal à θ, ce qui prouve que c coupe, sous l'angle θ, le parallèle du tore S passant par M, puisque TB est parallèle à la tangente en M au parallèle du tore.

3. Soit C_1 l'une des circonférences C; le lieu des centres des sphères passant par C_1 est la perpendiculaire D au plan de C_1 en son centre, et le lieu des centres des sphères passant par l'une quelconque des circonférences C est l'hyperboloïde à une nappe H engendré par D en tournant autour des Oz.

Comme la symétrique d'une circonférence C par rapport à un plan méridien est évidemment une circonférence Γ, H est aussi le lieu des centres des sphères contenant une circonférence Γ; mais ce sont les génératrices de système différent de D qui apparaissent maintenant comme lieu des centres des sphères passant par une circonférence Γ déterminée.

Soit s une sphère passant par C_1; la circonférence Γ_1 symétrique de Γ_1 par rapport au plan méridien passant par le centre de s, est évidemment une circonférence Γ; donc s contient bien une circonférence Γ. Les axes des circonférences C_1 et Γ_1 sont les deux génératrices de H passant par le centre de s. Aux points de rencontre de C_1 et Γ_1, la sphère s est bitangente au tore S.

On pourrait retrouver tout cela par le calcul; bornons-nous à former l'équation des sphères s.

Supposons d'abord que C_1 soit la circonférence

$$\xi^2 + y^2 - l^2 \cos^2\theta = 2ly \sin\theta,$$
$$x = \xi \cos\theta, \qquad z = \xi \sin\theta.$$

La sphère s aura pour équation

$$(1)\quad x^2+y^2+z^2-2ly\sin\theta-l^2\cos^2\theta+2\lambda(z-x\operatorname{tang}\theta)=0.$$

Et si C_1 est quelconque, on aura l'équation la plus générale en faisant tourner les axes d'un angle ω arbitraire :

$$(2)\quad \begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-2l\sin\theta\,(x\sin\omega+y\cos\omega)\\ &\qquad -l^2\cos^2\theta+2\lambda\,[z-\operatorname{tang}\theta\,(x\cos\omega+y\sin\theta)]=0.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi ce fait déjà vu que ces sphères s ont toutes une puissance égale à $-l^2\cos^2\theta$, par rapport au point O ; donc celles d'entre elles qui passent par un point a passent aussi par le point a', tranformé de a par l'inversion de centre O et de puissance $-l^2\cos^2\theta$.

4. Si a est sur Oz, a' y est aussi, et le centre de s est dans le plan perpendiculaire au milieu de aa' ; la cote de ce centre est $-\lambda$; on posera donc

$$-\lambda=l\cos\theta\operatorname{tang}\alpha.$$

Les coordonnées du centre de s sont :

$$X=-\frac{l\sin\theta}{\cos\alpha}\sin(\alpha+\omega),\qquad Y=\frac{l\sin\theta}{\cos\alpha}\cos(\alpha+\omega),$$
$$Z=l\cos\theta\operatorname{tang}\alpha.$$

Le plan méridien de ce centre fait avec Oxz un angle $\frac{(2k+1)\pi}{2}+(\alpha+\omega)$; ce plan bissecte intérieurement l'angle formé par les deux demi-droites joignant O aux centres des circonférences C_0 et Γ_0 situées sur s, droites qui font avec Ox les angles u et u' ; on a

$$u=\frac{\pi}{2}+\omega,$$

d'après la transformation qui permet de passer de (1) à (2).

Donc

$$\frac{u+u'}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2} + (\alpha - \omega) = k'\pi + \alpha + u,$$

$$\frac{u'-u}{2} = k'\pi + \alpha.$$

Si u_1 est l'angle relatif à C_1, on a de même

$$\frac{u'-u_1}{2} = k''\pi - \beta;$$

donc $\frac{u_1-u}{2} = \alpha - \beta$, à un multiple de π près.

Pour que la suite C_0, C_1, ... soit périodique et contienne n circonférences différentes, il est, d'après cela, nécessaire et suffisant que $\alpha - \beta$ soit égal à $p\frac{\pi}{n}$, p étant un nombre premier avec n.

En passant aux tangentes, cette relation s'écrit

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}$$

ou

$$\frac{Z'-Z}{l^2\cos^2\theta + ZZ'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}}{l\cos\theta},$$

en appelant Z et Z' les cotes des centres des deux systèmes de sphères.

On tire de là, en particulier,

$$u = \frac{Z}{Z'} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{\operatorname{tang}\alpha\left[1 + \operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}\operatorname{tang}\alpha\right]}{-\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n} + \operatorname{tang}\alpha}$$

$$= \frac{Z\left[l\cos\theta + Z\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}\right]}{l\cos\theta\left[-l\cos\theta\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n} + Z\right]},$$

formule qui donne le rapport des cotes en fonction de l'une d'elles.

Pour que le calcul soit fait algébriquement, il reste à calculer $\operatorname{tang} p\frac{\pi}{n}$ par un procédé algébrique, toutes les fois que cela est possible. Pour $n = 10$, on a à calculer $\operatorname{tang}\frac{\pi}{10}$, $\operatorname{tang}\frac{3\pi}{10}$, $\operatorname{tang}\frac{7\pi}{10}$, $\operatorname{tang}\frac{9\pi}{10}$; c'est-à-dire les tangentes des arcs x tels que $\operatorname{tang} 5x$ soit infinie; les valeurs de ces tangentes s'obtiennent en annulant le dénominateur de l'expression de $\operatorname{tang} 5x$ en fonction de $\operatorname{tang} x = t$, donc ce sont les racines de l'équation

$$1 - 10t^2 + 5t^4 = 0.$$

La formule donnant $\frac{Z'}{Z}$ en fonction de Z convient en particulier pour trouver les cas où l'un des deux systèmes de sphères se réduit au système des plans bitangents, comme on le verrait facilement.

Examinons la seconde hypothèse : s passe par a $(l\cos\theta\cos A, l\cos\theta\sin A, 0)$.

Portons ces coordonnées dans (2), il vient, en posant toujours $-\lambda = l\cos\theta\operatorname{tang}\alpha$,

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}(A - \omega), \qquad \alpha = A - \omega + k\pi.$$

Conservant à u et u' les significations indiquées, on a

$$u = \frac{\pi}{2} + \omega, \qquad \frac{u + u'}{2} = k'\pi + \alpha + u = (2k + 1)\frac{\pi}{2} + A.$$

De même,

$$\frac{u_1 + u'}{2} = (2k'' + 1)\frac{\pi}{2} + B;$$

donc, à un multiple de π près,

$$\frac{u_1 - u}{2} = B - A.$$

Pour que la suite C_0, C_1, ... soit périodique et contienne n circonférences différentes, il est donc nécessaire et suffisant que $B - A = p\frac{\pi}{n}$, p étant premier avec n. Cette condition est indépendante du choix de C_0.

Ces questions se traitent facilement par la Géométrie. Les sphères s, passant par un point a, passent par son associé a'; les centres de ces sphères sont donc sur la conique $\mathcal{A}$ section de H par le plan perpendiculaire au milieu de aa'. De même, les centres des sphères s passant par b sont sur une conique $\mathcal{B}$. Désignons par a_0, b_0, a_1, b_1, ... les centres des sphères s nécessaires pour construire la suite C_0, Γ_0, C_1, Γ_1, ...

La ligne brisée $a_0 b_0$, $b_0 a_1$, $a_1 b_1$, $b_1 a_2$, ... est formée de génératrices de H. Il faut écrire que ce polygone se ferme. D'après un théorème de Poncelet, on sait que la condition de fermeture ne dépend pas du point de départ a_0, mais dépend seulement des coniques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ prises sur H. Il est d'ailleurs inutile d'invoquer ce théorème.

Examinons la première hypothèse. Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux circonférences ; en projection sur Oxy, on a deux circonférences $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$, projections de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, qui admettent O pour centre, et les côtés du polygone sont tangents en projection au cercle de gorge de H. Il suffit donc d'écrire qu'un côté, $a_0 b_0$ par exemple, est en projection vu du centre sous l'angle $p\frac{\pi}{n}$, d'où un calcul identique à celui du texte.

Dans la seconde hypothèse, puisque a est à la distance $l\cos\theta$ de O, le point a' est symétrique de a par rapport à O, et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux hyperboles méridiennes de H. En projection sur Oxy, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux diamètres du cercle de gorge, l'angle de ces deux diamètres est l'angle aOb, c'est-à-dire $B - A$. En projection, le polygone $a_0 b_0 a_1 b_1$ ... est constitué de tangentes au cercle de gorge, et les sommets sont sur deux diamètres $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ de ce cercle.

Un calcul immédiat, qui est celui qu'on fait pour calculer la déviation d'un rayon lumineux après deux réflexions, montre que l'angle de $a_0 b_0$ et de $a_1 b_1$ est $2(B - A)$; pour qu'il y ait fermeture du polygone, a_n étant confondu avec a_0, il faut que $2n(B - A)$ soit un multiple de 2π.

On peut encore remarquer que les deux cas particuliers examinés se ramènent facilement l'un à l'autre ; une inversion dont le centre est sur la circonférence Λ de centre O, de rayon $l \cos \theta$, et située dans Oxy, transforme le tore en un tore dont le nouvel axe est la droite transformée de Λ; les parallèles de l'un des tores correspondent aux méridiens de l'autre.

On ramène le cas général, où a et b sont quelconques, à l'un ou l'autre des deux cas que l'on vient d'examiner; la figure formée par H, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ est, en effet, toujours la même que dans ces cas, à une transformation homographique près.

On voit ainsi que la condition de périodicité est indépendante du choix de C_0, et, en ramenant au second cas particulier examiné, on est conduit à exprimer cette condition de fermeture en disant que le rapport anharmonique des plans de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et des plans tangents à H menés par la droite commune aux plans de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est égale à l'une de celles des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, qui sont des racines primitives.

Si maintenant on utilise le théorème de Poncelet, d'après lequel la condition de fermeture d'un polygone formé de segments de génératrices d'une quadrique H et inscrit dans la courbe commune à H et à une autre quadrique est indépendante du premier élément choisi, on peut encore aller plus loin.

On peut, en effet, définir la suite C_0, Γ_0, C_1, Γ_1, ... à partir d'une circonférence C_0 à l'aide d'une famille algébrique quelconque de sphères bitangentes s pourvu que cette famille contienne deux sphères et deux seulement passant par chaque circonférence C et par chaque circonférence Γ. Une telle famille de sphères remplacera alors la famille formée à la fois par les sphères passant par a et par les sphères passant par b que l'on considérait auparavant.

Pour une telle famille, le lieu des centres des sphères est une courbe de H qui a deux points et deux seulement sur chaque génératrice de chacun des deux systèmes ; c'est donc une biquadratique gauche et le théorème de Poncelet s'applique ; donc, si la suite C_0, Γ_0, C_1, ..., construite à l'aide de cette famille de sphères, est périodique pour un choix particulier de C_0, elle l'est quelle que soit C_0.

On pourra prendre, par exemple, pour la famille des sphères s, celles qui sont tangentes à une droite, à un plan ou à une sphère donnée, et qui font partie de la même famille algébrique.

Le lecteur pourra rechercher pour ces cas quelles sont les conditions de périodicité ; il pourra aussi se demander dans quelle mesure les résultats obtenus sont applicables au cas d'une surface cyclide autre que le tore.

Composition de Mathématiques

(Sciences. - I et II).

On considère un point matériel M, *de masse* m, *sur lequel un centre fixe* S *exerce une attraction* F *inversement proportionnelle au carré de la distance* $r = \mathrm{SM}\left(\mathrm{F} = -\frac{km}{r^2}\right)$.

1° *Indiquer à quelles conditions doit satisfaire la vitesse initiale pour que la trajectoire de* M *soit une circonférence* C; *on calculera la durée* T *d'une révolution complète en fonction de la constante* k *et du rayon* R *de la circonférence* C.

2° *Un autre point matériel* M′, *de masse* m', *décrit sous l'action du même centre de forces* S $\left(\textit{la force étant } \mathrm{F}' = -\frac{km'}{r'^2} \textit{ avec } r' = \mathrm{SM}'\right)$ *une parabole* P *de paramètre* p. *Calculer le temps employé par* M′ *pour décrire un arc* AB *de la parabole ; on se donnera les angles* α *et* β *de* SA *et* SB *avec l'axe* Sx *de la parabole.*

3° *La parabole* P *et la circonférence* C *étant supposées dans un même plan, à quelle condition se coupent-elles en deux points* A *et* B ? *Cette condition étant remplie, calculer le temps* T′ *pendant lequel le point* M′ *reste à l'intérieur de* C, *et étudier la variation du rapport* $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}$ *quand le paramètre* p *varie.*

4° *L'orbite de la Terre étant supposée circulaire, calculer le nombre maximum de jours durant lesquels une comète, décrivant une orbite parabolique dans le plan de l'orbite terrestre, peut rester à l'intérieur de l'orbite terrestre.*

SOLUTION PAR H. L.

1° La position initiale de M est supposée sur C, donc $SM = r = R$. La vitesse initiale v doit être perpendiculaire à SM et telle que

$$\frac{v^2}{R} = \left|\frac{F}{m}\right| = \frac{k}{R^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{k}{R}}.$$

Donc la durée T est égale à

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}.$$

2° Au sommet α de la parabole $r = \frac{p}{2}$, le rayon de courbure est égal à p, donc la vitesse v en ce point est telle que

$$\frac{v^2}{p} = \left|\frac{F'}{m'}\right| = \frac{4k}{p^2}, \qquad v = 2\sqrt{\frac{k}{p}}.$$

La vitesse aréolaire constante de M′ est donc

$$\frac{1}{2} v \times \frac{p}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{kp}.$$

On aura le temps demandé en divisant par cette vitesse aréolaire l'aire balayée par SM, laquelle est

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\theta,$$

avec

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\theta},$$

en supposant Sx dirigée vers le sommet X.

On peut d'ailleurs aussi calculer cette aire comme différence des aires des secteurs paraboliques XSB, XSA, dont les aires sont fournies par la Géométrie élémentaire. L'aire du second est

$$\frac{2}{3}\rho\sin\alpha\left(\frac{p}{2} - \rho\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}\rho^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{6}\rho\sin\alpha[2p - \rho\cos\alpha];$$

dans cette formule, $\rho = \frac{p}{1 + \cos\alpha}$, ce qui permet d'écrire l'aire sous la forme $\frac{1}{6}\rho\sin\alpha(p + \rho)$.

3° α étant donné par la formule

$$R = \frac{p}{1 + \cos\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{p(2R - p)},$$

on a

$$T' = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{kp}}{2}\right)} \times 2 \times \frac{1}{6}R(p + R)\sin\alpha = \frac{2}{3\sqrt{k}}(p + R)\sqrt{2R - p};$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{3\pi}\,\frac{(p + R)(2R - p)^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}}.$$

Tous ces calculs supposent $p < 2R$; c'est donc la condition de rencontre du cercle et de la parabole, ce qui était évident géométriquement.

Quand p varie de 0 à $2R$, $\frac{T'}{T}$ se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs positifs dont la somme est constante. $\frac{T'}{T}$ commence donc par croître, à partir de $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$, pour décroître ensuite jusqu'à zéro ; le maximum a lieu pour

$$\frac{p+\mathrm{R}}{1}=\frac{2\mathrm{R}-p}{\frac{1}{2}}=\frac{3\mathrm{R}}{\frac{3}{2}},\qquad \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\leqq\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

4° Dans ce cas,

$$\mathrm{T}=365^{j},25 \text{ environ},$$

$$\mathrm{T}'\leqq\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\times 365,25=109^{j},6 \text{ environ}.$$