NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Sur un faisceau de strophoïdes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 551-558

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__551_1>

[$M^1 5i$]

SUR UN FAISCEAU DE STROPHOÏDES;

PAR M. R. BOUVAIST.

Les cubiques circulaires ayant un point double donné O et passant par trois points A, B, C forment un faisceau linéaire; ce sont les inverses des coniques passant par O et les points D, E, F correspondants à A, B, C dans une inversion de centre O. Si le point O est l'orthocentre du triangle DEF, toutes les cubiques considérées sont des strophoïdes. Pour qu'il en soit ainsi le point O doit être tel que les droites OA, OB, OC coupent le cercle circonscrit au triangle ABC en trois points D, E, F, tels que O soit l'orthocentre de DEF, ce qui exige, comme on le voit aisément, que O soit le centre d'un des cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

Détermination du foyer d'une cubique circulaire à point double. — Soient Γ une conique donnée, O un point de Γ, la corde d'intersection de Γ et du cercle de rayon nul de centre O est la polaire Δ par rapport à Γ du point de Frégier relatif à O et à Γ. Si nous transformons la figure dans une inversion de centre O, le cercle transformé de Δ aura pour centre le foyer singulier de la cubique circulaire transformée de Γ.

Si Γ est une hyperbole équilatère, Δ est la perpendiculaire menée par le centre de cette hyperbole au diamètre passant par O, et le foyer singulier de la strophoïde transformée de Γ est le transformé du point de l'hyperbole diamétralement opposé à O.

Faisceau de strophoïdes passant par trois points A, B, C *et ayant pour point double le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC. — Nous pouvons supposer, sans nuire en rien à la généralité de nos résultats, que le triangle ABC est le triangle aux pieds des hauteurs du triangle DEF transformé de ABC dans une inversion de centre O.

Lieu des foyers singuliers des strophoïdes du faisceau. — Ces strophoïdes sont les inverses des hyberboles équilatères ODEF; si l'une des hyperboles coupe en M le cercle circonscrit au triangle DEF, son centre est le milieu de OM, le lieu des foyers singuliers des strophoïdes du faisceau sera par suite l'inverse du cercle DEF, O étant le centre d'inversion et la puissance d'inversion OA. OD, c'est le cercle ABC.

Réciproquement : *Tout cercle passant par le foyer singulier d'une strophoïde coupe la courbe en trois points,* A, B, C *tels que le point double soit le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC.

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

Un cercle passant par un point O′ *d'une hyperbole équilatère coupe la courbe en trois points* D, E, F; *soit* O *le point de l'hyperbole diamétralement opposé à* O′, *les droites* OD, OE, OF *coupent le cercle* DEF *en* A, B, C; *le point* O *est le centre* O *d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC.

En effet, l'orthocentre de D, E, F est le point de l'hyperbole diamétralement opposé à O′, c'est le point O; le triangle A, B, C est donc homothétique par rapport à O du triangle au pied des hauteurs de DEF; O est donc le centre d'un cercle tangent aux côtés de ABC.

Une inversion de centre O nous donne le théorème énoncé plus haut relatif à la strophoïde et à un cercle passant par le foyer singulier de celle-ci.

Remarque. — Voici une autre propriété des points A, B, C d'intersection d'une strophoïde avec un cercle passant par le foyer singulier :

Les points A′, B′, C′ *d'intersection de la courbe avec les rayons vecteurs* OA′, OB′, OC′ *également inclinées sur les tangentes aux points doubles que les rayons* OA, OB, OC *sont en ligne droite.*

Cette propriété se démontre sans difficulté soit par le calcul, soit en partant des propriétés de l'hyperbole équilatère.

Remarque. — Si le point O est le centre du cercle DEF considéré plus haut, le triangle DEF est équilatéral, il en est de même du triangle ABC; donc : *le cercle passant par le foyer singulier d'une strophoïde et ayant pour centre le point double de la courbe coupe celle-ci en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

Théorème. — *Toute strophoïde passant par les sommets d'un triangle* ABC *et ayant pour point double le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC *est analagmatique dans l'inversion triangulaire admettant pour triangle de référence le triangle* ABC.

L'équation en coordonnées trilinéaires normales d'une cubique circulaire circonscrite au triangle de référence est

$$\begin{aligned} f(xyz) = {} & (ux + vy + wz)(ayz + bxz + cxy) \\ & + (ax + by + cz)(\alpha yz + \beta xz + \gamma xy) = 0; \end{aligned}$$

elle admettra pour point double le centre du cercle inscrit au triangle si les équations

$$f'_x = f'_y = f'_z = 0$$

sont satisfaites pour $x = y = z = 1$, ce qui donne, en posant $a + b + c = 2p$, $u + v + w = \sigma$,

$$\alpha = u - \frac{a\sigma}{p}, \qquad \beta = v - \frac{b\sigma}{p}, \qquad \gamma = w - \frac{c\sigma}{p},$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} & (ux + vy + wz)(ayz + bxz + cxy) \\ & \quad + (ax + by + cz)(uyz + vxz + wxy) \\ & \quad - \frac{\sigma}{p}(ax + by + cz)(ayz + bxz + cxy) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation ne change pas quand on y change x, y, z, en $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$.

Remarque. — Si le point double était le centre d'un cercle ex-inscrit, par exemple le point $x = -1$, $y = z = 1$, l'équation de la courbe serait

$$\begin{aligned}&(ux + vy + wz)(ayz + bxz + cxy)\\&\quad + (ax + by + cz)(uyz + vxz + wxy)\\&\quad - \frac{\sigma'}{p - a}(ax + by + cz)(ayz + bxz + cxy) = 0,\end{aligned}$$

σ' étant égal à

$$-u + v - w,$$

la conclusion reste par conséquent la même.

Soit S un point du cercle circonscrit au triangle ABC; il résulte immédiatement le théorème précédent que l'asymptote de la strophoïde du faisceau considéré admettant S comme foyer singulier, est parallèle à la direction inverse du point S par rapport au triangle ABC. En tenant compte des propriétés énoncées plus haut, nous trouvons le théorème suivant :

Un cercle quelconque passant par le foyer singulier d'une strophoïde coupe la courbe en trois points M, N, P, *la droite de Simson du foyer singulier relative au triangle* MNP *est perpendiculaire à l'asymptote de la courbe.*

Enveloppe des asymptotes des strophoïdes du faisceau. — Soit S le foyer singulier d'une strophoïde du faisceau, le point S' symétrique de S par rapport au point double O est sur l'asymptote de la courbe.

La perpendiculaire abaissée de S sur la droite de Simson de S relative au triangle ABC enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements H symétrique de l'hypocycloïde enveloppe des droites de Simson de ABC par rapport au centre du cercle ABC; l'asymptote est la parallèle menée par S' à la perpendiculaire menée par S à la droite de Simson de S; elle enveloppe, par suite, l'hypocycloïde symétrique de H par rapport à O.

Considérons maintenant une strophoïde de point double O, de foyer singulier F, et un cercle quelconque passant par F et coupant la courbe aux points A, B, C. Il existe une parabole de foyer F inscrite au triangle ABC; soit Δ la tangente commune autre que AB, AC, BC à cette parabole et au cercle de centre O tangent aux côtés du triangle ABC. Le lieu des foyers des coniques inscrites au triangle ABC et tangentes à Δ est une strophoïde, passant par ABC, ayant pour point double O et pour foyer singulier F, c'est la strophoïde considérée. En tant que lieu de foyers des coniques passant par le quadrilatère ABC, Δ, elle passe par les intersections de Δ avec les côtés du triangle ABC. La courbe étant d'autre part analagmatique dans une conversion triangulaire admettant ABC comme triangle de référence, les tangentes à la courbe aux sommets du triangle ABC (inverses des droites joignant chaque sommet au point d'intersection de la courbe avec le côté opposé) rencontreront les côtés BC, CA, AB en trois points en ligne droite. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : *Un cercle quelconque passant par le foyer singulier* F *d'une strophoïde rencontre la courbe en trois points* A, B, C; *les côtés* BC, CA, AB *rencontrent la courbe en* α, β, γ; *les points* α, β, γ *sont sur une tangente au cercle ayant pour centre le point double de la courbe et tangent aux côtés du triangle* ABC. *Les tangentes à la courbe aux sommets* A, B, C *rencontrent les côtés* BC, CA, AB *en trois points en ligne droite.*

Généralisation. — Considérons plus généralement une cubique circulaire Γ passant par son foyer singulier (focale de van Rees) et un cercle quelconque passant par ce foyer singulier F et rencontrant la courbe en A, B, C. Il existe une parabole P du foyer F inscrite au triangle ABC; soit Δ une tangente quelconque de P, le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère ABC, Δ est une focale passant par A, B, C et ayant F comme foyer singulier. Si Δ varie nous obtenons un faisceau linéaire de focales, qui contient visiblement la focale Γ; à Γ correspond une tangente Δ_1 à la parabole P. L'asymptote de Γ est parallèle à l'axe de la parabole P, c'est-à-dire à la direction inverse du point F par rapport au triangle ABC. Il résulte de tout cela que la focale est analagmatique dans une inversion triangulaire admettant ABC comme triangle de référence et l'on a les théorèmes suivants :

Un cercle quelconque passant par le foyer singulier F *d'une focale de van Rees coupe la courbe en trois points* A, B, C :

1° *Les côtés* AB, BC, CA *coupent la courbe en trois points en ligne droite;*

2° *Les tangentes à la courbe aux sommets* A, B, C *rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite. Ces points sont, par suite, les contacts d'une conique tritangente à la courbe;*

3° *La droite de Simson du point* F *relative au triangle* ABC *est perpendiculaire à l'asymptote de la courbe;*

4° *La courbe est analagmatique dans une inversion triangulaire admettant* ABC *comme triangle de référence.*

Remarque. — Il est facile de généraliser ces théorèmes dans le cas d'une cubique quelconque par projection; la proposition 3° peut, en particulier, s'énoncer dans le cas d'une cubique quelconque comme il suit :

Soit A *un point d'une cubique*, B, C *les contacts de deux tangentes à la courbe menées par* A; *une conique passant par* ABC *coupe la courbe en trois points* D, E, F *qui sont les contacts d'une conique tritangente à la cubique.*