G. FONTENÉ

Sur l'intégration des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 529-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__529_0>

[C2a]

SUR L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES [1];

PAR M. G. FONTENÉ.

I. — RECHERCHE DIRECTE DE LA PARTIE ALGÉBRIQUE.

a. — Généralités.

1. Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction rationnelle irréductible, sans partie entière. Pour établir que la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$ peut s'obtenir indépendamment de la connaissance des racines de l'équation $F(x) = 0$, ce qui est d'ailleurs un fait bien connu, on peut raisonner comme il suit :

Soit

$$F(x) = X^4 Y^3 Z^2 T,$$

chacun des polynomes X, Y, Z, T n'ayant que des racines simples.

On veut avoir

$$\int \frac{f}{X^4 Y^3 Z^2 T}\,dx = \frac{\varphi}{X^3 Y^2 Y} + \int \frac{\omega}{XYZT}\,dx,$$

le degré du polynome φ étant inférieur d'une unité au degré du polynome $X^3 Y^2 Z$; et l'on sait que cela n'est possible que d'une façon. Il existe donc un polynome φ,

[1] Je signale comme résultat essentiel de ce Mémoire la détermination effective de la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{1}{X^2}\,dx$, où X est un polynome du 4^e degré; *voir* les formules (C) et (C').

et un seul, de degré inférieur au degré du polynome $X^2 Y^3 Z$, satisfaisant à l'identité *algébrique* qu'on déduit de l'égalité précédente par dérivation; la détermination de ce polynome se fait donc par un calcul du premier degré, et le fait annoncé est ainsi établi.

2. L'identité en question est

$$\frac{f}{X^4 Y^3 Z^2 T} = -\frac{3X'YZ + 2Y'XZ + Z'XY}{X^4 Y^3 Z^2}\varphi + \frac{\varphi'}{X^3 Y^2 Z} + \frac{\omega}{XYZT},$$

ou

$$f + (3X'YZ + 2Y'XZ + Z'XY)T\varphi - XYZT\varphi' = X^3 Y^2 Z\omega.$$

Cette identité exprime, en ce qui concerne le polynome φ, que le premier membre est divisible par $X^3 Y^2 Z$; il se trouve naturellement que le polynome φ dépend, d'après son degré, de paramètres en nombre égal à celui des conditions auxquelles il faut satisfaire, et le mécanisme de la division montre que ces conditions sont du premier degré par rapport aux paramètres en question ; mais, dans cet ordre d'idées, il faudrait faire voir que le problème n'est ni impossible, ni indéterminé.

3. L'identité ci-dessus renferme les seuls polynomes

$$X^3Y^2Z, \quad (X^3Y^2Z)' : X^2Y, \quad XYZT, \quad T;$$

si donc on voulait l'employer à la détermination du polynome φ, en partant du polynome $F(x)$, on n'aurait à faire qu'une partie du calcul relatif à la recherche des polynomes X, Y, Z, T, à savoir ce qui concerne la recherche du polynome T; cela résulte du Tableau suivant :

$$
\begin{array}{lc}
(a) & X^4 Y^3 Z^2 T, \quad X^3 Y^2 Z, \quad X^2 Y, \\
(b) & XYZT, \quad XYZ. \\
(c) & T.
\end{array}
$$

4. Si l'on a simplement

$$F(x) = X^2 Y,$$

l'identité ci-dessus se réduit à

$$f + X'Y \varphi - XY \varphi' = X \omega;$$

le polynome X doit alors diviser le polynome

$$f + X'Y \varphi.$$

Si l'on veut faire le calcul par cette méthode, on mettra le polynome f sous la forme

$$f \equiv - X'Y \varphi + X \psi,$$

et l'on doit observer à ce propos que les deux polynomes $X'Y$ et X sont premiers entre eux; on aura, d'ailleurs,

$$\omega = - Y \varphi' + \psi.$$

[Bien entendu, si l'on écrit, pour faire un calcul inverse,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{f}{X^2 Y} dx &= \int \frac{-X'}{X^2} \varphi \, dx + \int \frac{\psi}{XY} dx \\
&= \int \varphi \, d\left(\frac{1}{X}\right) + \int \frac{\psi}{XY} dx,
\end{aligned}
$$

on a à faire une intégration par parties, correspondant à la dérivation du produit $\varphi \times \frac{1}{X}$ dans le calcul tel qu'il a été fait précédemment, et l'on obtient

$$\int \frac{f}{X^2 Y} dx = \frac{\varphi}{X} + \int \frac{-Y \varphi' + \psi}{XY} dx.]$$

Si l'on suppose $f = 1$, c'est-à-dire si l'on considère l'intégrale $\int \frac{1}{X^2 Y} dx$, on devra avoir

$$1 = -X'Y\varphi + X\psi;$$

les degrés des polynomes X et Y étant m et n, le polynome φ devra être de degré $m-1$; le polynome ψ sera alors du degré $m+n-2$, et le degré du polynome ω sera également $m+n-2$, au lieu de $m+n-1$.

b. — Applications.

5. Appliquons cette méthode à l'intégrale

$$\int \frac{1}{X^2} dx,$$

X n'ayant que des racines simples. On doit déterminer les polynomes φ et ψ, de degrés $m-1$ et $m-2$, d'après l'identité

$$1 \equiv -X'\varphi + X\psi.$$

Si l'on prend d'abord

$$X = ax^2 + 2bx + c,$$
$$X' = 2(ax + b),$$

on a l'identité

$$2\Delta \equiv -X'(ax + b) + X.2a;$$

on a, par suite,

$$2\Delta\varphi = ax + b, \qquad 2\Delta\psi = 2a,$$

et, comme ω est ici $-\varphi' + \psi$,

$$2\Delta\omega = a.$$

On a donc

$$(\mathrm{A}) \qquad 2\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{ax+b}{X} + \int \frac{a}{X}\,dx.$$

6. Soit maintenant

$$X = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

d'où

$$X' = 3(ax^2 + 2bx + c).$$

Pour satisfaire à l'identité

$$1 \equiv -X'\varphi + X\psi,$$

j'emploierai une méthode que j'ai indiquée ailleurs. Le résultant des polynomes X et X', ou le discriminant de X, est, d'après Sylvester, le quotient par a de l'expression

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d \\ a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & c \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace chaque élément de la dernière colonne par la somme des produits obtenus en multipliant les éléments corespondants des colonnes successives par x^4, x^3, x^2, x, 1, on a

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & xX \\ 0 & a & 3b & 3c & X \\ a & 2b & c & 0 & \frac{1}{3}x^2X' \\ 0 & a & 2b & c & \frac{1}{3}xX' \\ 0 & 0 & a & 2b & \frac{1}{3}X' \end{vmatrix},$$

les polynomes de la dernière colonne étant les polynomes de Sylvester; on a, par suite,

$$3\Delta_1\varphi = -\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & 0 \\ a & 2b & c & 0 & x^2 \\ 0 & a & 2b & c & x \\ 0 & 0 & a & 2b & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1\psi = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & x \\ 0 & a & 3b & 3c & 1 \\ a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & 0 \end{vmatrix},$$

et, comme ω est ici $-\varphi' + \psi$,

$$3\Delta_1\omega = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 3.x \\ 0 & a & 3b & 3c & 3.1 \\ a & 2b & c & 0 & 2x \\ 0 & a & 2b & c & 1 \\ 0 & 0 & a & 2b & 0 \end{vmatrix}.$$

Le discriminant Δ est $\Delta_1 : a$; les trois déterminants ci-dessus sont également divisibles par a. On a ainsi, après avoir retranché, dans chaque déterminant, la première ligne de la troisième, et la seconde de la quatrième,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d \\ -b & -2c & -d & 0 \\ 0 & -b & -2c & -d \\ 0 & a & 2b & c \end{vmatrix},$$

$$3\Delta\varphi = -\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & 0 \\ -b & -2c & -d & x^2 \\ 0 & -b & -2c & x \\ 0 & a & 2b & 1 \end{vmatrix},$$

$$3\Delta\omega = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & 3.1 \\ -b & -2c & -d & -x \\ 0 & -b & -2c & -2.1 \\ 0 & a & 2b & 0 \end{vmatrix}.$$

On a alors

$$(B)\quad 3\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{-2a(ac-b^2)x^2+(a^2d-7abc+6b^3)x+(abd+3b^2c-4ac^2)}{X} + 2\int \frac{-a(ac-b^2)x+(a^2d-4abc+3b^3)}{X}\,dx.$$

7. Pour un polynome du 4^e degré

$$X = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e,$$

il convient de conduire le calcul comme il suit. Nous poserons

$$U = ax + b,$$

ce qui donne, en remplaçant x par $\frac{-b}{a} + \frac{U}{a}$,

$$a^3X = U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + \varepsilon,$$

sans terme en U^3, avec

$$\begin{aligned} \gamma &= a.c - b^2,\\ \delta &= a^2.d - 3ab.c + 2b^3,\\ \varepsilon &= a^3.e - 4a^2b.d + 6ab^2.c - 3b^4; \end{aligned}$$

les quatre quantités a, γ, δ, ε forment un système complet de semi-invariants pour le polynome X (*voir* une Note précédente, 1911, p. 337). Toutefois, nous n'emploierons pas ε, mais bien les invariants

$$\begin{aligned} S &= ae - 4bd + 3c^2,\\ T &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3, \end{aligned}$$

qui contiennent e; les cinq quantités

$$a,\quad \gamma,\quad \delta,\quad S,\quad T,$$

dont nous nous servirons, sont alors liées par la relation

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 + \delta^2,$$

qui résulte de l'élimination de ε entre les égalités

$$a^2 S = \varepsilon + 3\gamma^2, \qquad a^3 T = \gamma\varepsilon - \delta^2 - \gamma^3,$$

fournies par la considération du polynome en U; dans les calculs, on remplacera δ^2 par l'expression

$$\delta^2 = a^2(\gamma S - aT) - 4\gamma^3.$$

Nous écrirons

$$a^2 X = U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + (a^2 S - 3\gamma^2);$$

on a encore

$$a^2 X_1 = U^3 + 3\gamma U + \delta,$$

la dérivée de X par rapport à x étant $4X_1$.

Le discriminant du polynome X est

$$\Delta = S^3 - 27T^2.$$

En désignant par H le hessien, le coefficient de x^4 dans le covariant bien connu $2S.H - 3T.X$ est la quantité $\theta = 2\gamma S - 3aT$, que nous rencontrerons par la suite.

Cela posé, en supposant pour le moment $a = 1$, on a

$$4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = 4\int \frac{\Delta}{(U^4 + 6\gamma U^2 + \ldots)^2}\,dU,$$

et Δ est aussi le discriminant du polynome $U^4 + \ldots$.

Or, on aurait, avec x et a, b, c, d, e,

$$4\Delta\varphi = -\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & 0 \\ -b & -3c & -3d & -e & 0 & x^3 \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & x^2 \\ 0 & 0 & -b & -3c & -3d & x \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & 1 \end{vmatrix},$$

$$4\Delta\omega = \begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & 0 & 4.x \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & 4.1 \\ -b & -3c & -3d & -e & 0 & -x^2 \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & -2.x \\ 0 & 0 & -b & -3c & -4d & -3.1 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & 0 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant x et a, b, c, d, e par U et $1, 0, \gamma, \delta$, $S - 3\gamma^2$, on obtient

$$4\Delta\varphi = -\begin{vmatrix} -3\delta & 21\gamma^2 - S & 12\gamma\delta & U^3 \\ -3\gamma & -3\delta & 3\gamma^2 - S & U^2 \\ 0 & -3\gamma & -3\delta & U \\ 1 & 0 & 3\gamma & 1 \end{vmatrix},$$

$$4\Delta\omega = \begin{vmatrix} -3\delta & 21\gamma^2 - S & 12\gamma\delta & -U^2 + .12\gamma \\ -3\gamma & -3\delta & 3\gamma^2 - S & -2.U \\ 0 & -3\gamma & -3\gamma & -3.1 \\ 1 & 0 & 3\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe ces déterminants en tenant compte de l'expression de δ^2 donnée ci-dessus, et si l'on rétablit a, en rendant la formule homogène en a, b, c, d, e, on a

$$\text{(C)}\quad 4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx$$
$$= \frac{3\theta U^3 - 3\delta S U^2 + (a^2 S^2 - 63 a\gamma T + 30\gamma^2 S) U + 9\delta(\gamma S - 3aT)}{a^2 X}$$
$$+ 3\int \frac{\theta U^2 - 2\delta S U + (a^2 S^2 - 27 a\gamma T + 6\gamma^2 S)}{aX}\,dx.$$

Si l'on remplace U par $ax + b$, les quotients par a^2 et a des numérateurs des deux fonctions sont

$$3a(2\gamma S - 3aT)x^3 - 3[(a^2d - 9abc + 8b^3)S + 9abT]x^2$$
$$+ [(a^2e - 10abd + 33ac^2 - 24b^2c)S - 9(7ac - 4b^2)T]x$$
$$+ [(abe + 9acd + 6bc^2 - 16b^2d)S - 9(3ad - 2bc)T],$$

et

$$a(2\gamma S - 3aT)x^2 - 2[(a^2d - 5abc + 4b^3)S + 3abT]x$$
$$+ [(a^2e - 6abd + 9ac^2 - 4b^2c)S - 3(9ac - 8b^2)T].$$

8. On aurait pu procéder d'une manière analogue pour le cas du 3e degré. Les semi-invariants sont

$$\gamma = ac - b^2,$$
$$\delta = a^2d - 3ab + 2b^3,$$

et l'on a

$$a^2X = U^3 + 3\gamma U + \delta,$$
$$a\,X_1 = U^2 + \gamma,$$

la dérivée de X par rapport à x étant $3X_1$. Le discriminant est

$$\Delta = a^2d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4b^3d - 3b^2c^2;$$

le polynome en U donne

$$a^2\Delta = \delta^2 + 4\gamma^3.$$

On trouve

$$\text{(B)}\quad 3\int\frac{\Delta}{X^2}dx = \frac{-2\gamma U^2 + \delta U - 4\gamma^2}{aX} + 2\int\frac{-\gamma U + \delta}{X}dx.$$

c. — Transformation des formules.

9. Relativement à la formule (B), si l'on divise le polynome $-2\gamma U^2 + \ldots$ par le polynome

$$2(-\gamma U + \delta),$$

on a

$$2\gamma(-2\gamma U^2+\ldots) = 2(-\gamma U+\delta)(2\gamma U+\delta) - 2a^2\Delta$$
$$= 2Z.aY - 2a^2\Delta,$$

en posant

$$Z = -\gamma U + \delta,$$
$$aY = 2\gamma U + \delta.$$

On a ainsi

$$(\mathrm{B}') \qquad 3\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{2Z.Y - 2a\Delta}{2\gamma.X} + \int \frac{2Z}{X}\,dx,$$

2γ étant le coefficient de U dans aY.

Pour $\Delta = 0$, cela donne

$$\frac{Z.Y}{2\gamma.X} + \int \frac{Z}{X}\,dx = 0;$$

on doit donc avoir dans cette hypothèse

$$kX = Y^2 Z,$$

car cela donnera le résultat exact

$$\frac{1}{2\gamma.Y} + \int \frac{1}{Y^2}\,dx = 0,$$

2γ étant le coefficient de x dans Y.

Et en effet, si, en dehors de l'hypothèse $\Delta = 0$, on effectue les opérations qui concernent la recherche du plus grand commun diviseur entre le polynome X et sa dérivée débarrassée du facteur 3, soit X_1, on obtient comme reste du premier degré le polynome Y. Le polynome Z est, à un facteur constant près, le quotient entier de la division du polynome X par Y^2, et l'on a

$$4\gamma^3 X = -Y^2 Z + \Delta(3\gamma U + \delta).$$

L'hypothèse $\Delta = 0$ donne bien $kX = Y^2 Z$.

Observons que, si l'on ordonne Y par rapport à x, on a

$$Y = 2(ac - b^2)x + (ad - bc);$$

c'est la dérivée du hessien, comme on devait s'y attendre.

10. Pour un polynome du 4^e degré, si l'on divise le polynome $3\theta U^3 - 3\delta SU^2 + \ldots$ de la formule (C) par le polynome $3(\theta U^2 - 2\delta SU + \ldots)$, on a

$$\begin{aligned}\theta(3\theta U^3 - 3\delta SU^2 + \ldots) &= 3(\theta U^2 - 2\delta SU + \ldots)(\theta U + \delta S)\\ &\quad + a^2\Delta(2\gamma U - 3\delta)\\ &= 3aZ.aY + a^2\Delta(2\gamma U - 3\delta),\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}aZ &= \theta U^2 - 2\delta SU + (a^2S^2 - 27a\gamma T + 6\gamma^2 S),\\ aY &= \theta U + \delta S.\end{aligned}$$

On a ainsi

$$(C')\qquad 4\int \frac{\Delta}{X^2}dx = \frac{3Z.Y + \Delta(2\gamma U - 3\delta)}{\theta X} + \int \frac{3Z}{X}dx.$$

Ici encore, pour $\Delta = 0$, on doit avoir $kX = Y^2 Z$; mais les choses ne sont plus tout à fait aussi simples que dans le cas précédent. Si, en dehors de l'hypothèse $\Delta = 0$, on effectue les opérations qui concernent la recherche du plus grand commun diviseur entre le polynome X et sa dérivée X_1 débarrassée du facteur 4, on obtient bien comme reste du 1^{er} degré le polynome Y. Mais Z est cette fois, à un facteur constant près, le quotient entier de la division de X par $Y_2 + \gamma\Delta$, et voici comment on peut le reconnaître.

Si l'on commence la division du polynome X par Y^2, *en se bornant aux termes en* U^2 *et en* U *dans le quotient*, on a

$$\theta^3 a^3 X = a^2 Y^2(\theta U^2 - 2\delta SU) + \theta(6\theta^2\gamma + 3\delta^2 S^2)U^2 + \lambda U + \mu.$$

Il faut observer ici que l'expression

$$(6\theta^2\gamma + 3\delta^2 S^2) - a^2\gamma\Delta$$

est divisible par θ, car elle devient

$$6\theta^2\gamma + a^2 S^2(2\gamma S - 3aT) - 3\gamma(4\gamma^2 S^2 - 9a^2T^2),$$

ou

$$6\theta^2\gamma + \theta[a^2S^2 - 3\gamma(2\gamma S + 3aT)],$$

ou

$$\theta(a^2S^2 - 27a\gamma T + 6\gamma^2 S);$$

on a donc, en désignant par k la quantité qui multiplie θ,

$$\begin{aligned}\theta^3 a^3 X &= a^2 Y^2(\theta U^2 - 2\delta SU) + (\theta^2 k + \theta a^2\gamma\Delta)U^2 + \ldots \\ &= a^2(Y^2 + \gamma\Delta)(\theta U^2 - 2\delta SU + k) + \lambda' U + \mu',\end{aligned}$$

ou

$$\theta^3 X = (Y^2 + \gamma\Delta)Z + \lambda'' U + \mu''.$$

On trouve d'ailleurs que le reste $\lambda'' U + \mu''$ est

$$\Delta[4\delta T.U + (a^2 ST - 2a\gamma S^2 + 24\gamma^2 T)],$$

de sorte que l'hypothèse $\Delta = 0$ donne bien $kX = Y^2 Z$.

Si l'on ordonne Y par rapport à x, on a

$$\begin{aligned}Y &= (2\gamma S - 3aT)x + [(ad - bc)S - 3bT] \\ &= S[2(ac - b^2)x + (ad - bc)] - 3T(ax + b);\end{aligned}$$

j'ai fait observer ailleurs que ce polynome est le quotient par 24 de la dérivée troisième du covariant $2S.H - 3T.X$.

d. — Extension d'un résultat.

11. Dans le cas d'un polynome du 3^e degré, si l'on suppose $a = 1$, $b = 0$, de sorte que U se confond avec x, on a, en remplaçant c et d par p et q,

$$\gamma = p, \qquad \delta = q, \qquad \Delta = q^2 + 4p^3,$$
$$X = x^3 + 3px + q,$$
$$Y = 2px + q,$$
$$Z = -px + q,$$
$$3\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{-2px^2 + qx - 4p^2}{X} + 2\int \frac{-px+q}{X}\,dx.$$

Pour un polynome du 4^e degré, l'expression de $a^3 X$ au moyen de U conduit à considérer le cas particulier $\gamma = 0$. On a alors

$$S = ac + 3c^2,$$
$$T = 2bcd - ad^2 - c^3,$$
$$\delta = a^2 d - b^3,$$
$$\theta = -3aT,$$
$$a^3 X = U^4 + 4\delta U + a^2 S,$$
$$aY = -3aT.U + \delta S,$$
$$aZ = -3aT.U^2 - 2\delta S.U + a^2 S^2,$$

et, à cause de $\gamma = 0$, Z est le quotient entier de la division du polynome $\theta^3 X$ par Y^2; le polynome $3\theta U^3 - \ldots$ de la formule (C) se réduit à

$$-9aT.U^3 - 3\delta S.U^2 + a^2 S^2.U - 27a\delta T.$$

Si l'on suppose, en outre, $a = 1$, $b = 0$, de sorte que U se confond avec x, on a, en remplaçant d et e par p et q,

$$c = 0, \qquad \delta = p, \qquad S = q, \qquad T = -p^2, \qquad \theta = 3p^2,$$
$$X = x^4 + 4px + q,$$
$$Y = p(3px + q),$$
$$Z = 3p^2x^2 - 2pqx + q^2,$$
$$4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{9p^2x^3 - 3pqx^2 + q^2x + 27p^3}{X} + 3\int \frac{3p^2x^2 - 2pqx + q^2}{X}\,dx.$$

12. On peut étendre ces derniers résultats. Si l'on remarque que le polynome Z relatif au cas où X est du 3^e^ degré peut être défini par la relation

$$\delta^2 X - \Delta U^3 + Y^2 Z,$$

on est mis sur la voie du résultat suivant que je me borne à indiquer :

Soit le polynome

$$X = x^{m+1} + (m+1)px + q;$$

si l'on effectue les opérations qui concernent la recherche du plus grand commun diviseur entre ce polynome et sa dérivée, on a immédiatement le reste du premier degré

$$Y = mpx + q,$$

et le discriminant

$$\Delta = q^m + (-1)^m m^m p^{m+1};$$

la relation

$$q^m X - \Delta x^{m+1} + Y^2 Z,$$

ou

$$(-1)^{m+1} m^m p^{m+1} x^{m+1} + (m+1) p q^m x + q^{m+1}$$
$$= (mpx + q)^2 Z$$

définit alors un polynome Z entier en X.

Cela posé, on a la formule

$$(m+1)\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{YZ - \Delta}{pX} + m\int \frac{Z}{X}\,dx.$$

J'indiquerai la loi de formation du polynome Z en donnant sa valeur pour $m+1 = 7$; on a alors

$$Z = -6^4 p^5 x^5 + 2.6^3 p^4 q x^4 - 3.6^2 p^3 q^2 x^3$$
$$+ 4.6 p^2 q^3 x^2 - 5.pq^4 x + q^5,$$

le dernier terme ayant une loi de formation spéciale.

Quant au polynome $\dfrac{YZ - \Delta}{p}$, sa valeur est, dans le même cas,

$$\frac{YZ - \Delta}{p} = -6^5 p^5 x^6 + 6^4 p^4 q x^5 - 6^3 p^3 q^2 x^4 + 6^2 p^2 q^2 x^3 - 6 p q^4 x^2 + q^5 x + (-1)^7 6^6 p^6.$$

Pour comparer le résultat actuel à ceux déjà obtenus ($m = 2$, $m = 3$), on doit observer que les discriminants des formules (A), (B), (C) sont ici

$$ac - b^2 = q - p^2,$$
$$(\delta^2 + 4\gamma^3) : a^2 = q^2 + 4p^3,$$
$$S^3 - 27T^2 = q^3 - 28p^4,$$

de sorte qu'ils sont identiques à ceux que définit la formule ci-dessus (¹).

II. — Recherche directe de la partie transcendante.

13. En supposant que la fraction rationnelle a d'abord été mise sous la forme d'une somme de fractions de la forme $\frac{f}{X^{m+1}}$, on a à considérer l'intégrale

$$\int \frac{f}{X^{m+1}} dx,$$

le polynome X n'ayant que des racines simples. Nous chercherons cette fois directement la partie transcendante de cette intégrale.

14. Voyons d'abord à quelles conditions cette intégrale est purement algébrique ; le nombre de ces conditions est égal au degré du polynome X.

(¹) Les discriminants des formules (A), (B), (C) sont, au point de vue du signe, ceux qui se trouvent définis dans une Note précédente (1911, p. 348), et qui contiennent respectivement les termes ac, a^2d^2, a^3e^3.

On veut avoir, par exemple,

$$\int \frac{f}{X^4}\,dx = \frac{\varphi}{X^3}.$$

On en déduit, par quatre dérivations successives,

$$\begin{aligned}
&f + 3X'\varphi - X\varphi' \equiv 0,\\
&f' + 3X''\varphi + 2X'\varphi' - X\varphi'' \equiv 0,\\
&f'' + 3X'''\varphi + 5X''\varphi' + X'\varphi'' - X\varphi''' \equiv 0,\\
&f''' + 3X^{\text{IV}}\varphi + 8X'''\varphi' + 6X''\varphi'' - X\varphi^{\text{IV}} \equiv 0,
\end{aligned}$$

le coefficient d'un terme qui n'est ni le premier, ni le second, ni le dernier dans la ligne où il se trouve, étant la somme du coefficient du terme placé au-dessus de lui et du coefficient du terme placé à gauche de celui-là. Les coefficients des avant-derniers termes sont successivement 3, 2, 1, 0, de sorte que *la dérivée* φ''', *tout aussi bien que la dérivée* φ^{IV}, *ne figure dans les identités ci-dessus que multipliée par le facteur* X. Éliminons alors les trois polynomes φ, φ', φ'' entre ces quatre identités ; nous avons l'identité

$$\begin{vmatrix}
f & 3X' & -X & 0\\
f' & 3X'' & 2X' & -X\\
(f'' - X\theta''') & 3X''' & 5X'' & X'\\
(f''' - X\theta^{\text{IV}}) & 3X^{\text{IV}} & 8X''' & 6X''
\end{vmatrix} \equiv 0,$$

de laquelle il résulte que le polynome

$$\begin{vmatrix}
f & 3X' & 0 & 0\\
f' & 3X'' & 2X' & 0\\
f'' & 3X''' & 5X'' & X'\\
f''' & 3X^{\text{IV}} & 8X''' & 6X''
\end{vmatrix}$$

doit être divisible par X.

On a ainsi des conditions en nombre égal au nombre des conditions requises. Nous désignerons par P ce polynome.

Dans le cas général, la première ligne du déterminant est

$$f, \quad mX', \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0;$$

dans la dernière colonne, il y a d'abord $m-1$ zéros, puis X', puis $\frac{(m+1)m}{2}X''$; le coefficient de ce dernier terme est, en effet, $m+(m-1)+\ldots+1$.

Pour $m=1$, le polynome

$$\begin{vmatrix} f & X' \\ f' & X'' \end{vmatrix}$$

doit être divisible par X ; ce résultat simple est indiqué dans les *Leçons d'Algèbre et d'Analyse* du regretté J. Tannery (t. I, p. 193, Exercice 68), et c'est en partant de là que j'ai été conduit à ce qui précède.

[On peut même se rendre compte du résultat obtenu en observant que toute valeur de x qui annule X satisfait aux quatre relations

$$\begin{aligned}
&f + 3X'\varphi = 0,\\
&f' + 3X''\varphi + 2X'\varphi' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

avec φ, φ', φ'' seulement ; le déterminant ci-dessus est donc nul pour les valeurs de x qui annulent X, il est divisible par X.]

15. Revenant maintenant au cas général, *on veut avoir*, *par exemple*,

$$\int \frac{f}{X^4}dx = \frac{\varphi}{X^3} + \int \frac{\omega}{X}dx,$$

de sorte que l'intégrale

$$\int \frac{f-\omega X^3}{X^4}dx$$

doit être algébrique. Le polynome ω de degré inférieur au degré de X, est donc déterminé par la condition que le polynome P, dans lequel on remplace f par $f - \omega X^3$, soit divisible par X; en négligeant les termes qui contiennent X en facteur, on a seulement à remplacer dans le polynome en question f''' par $f''' - 3\,!\,\omega X'^3$; finalement, *le polynome* ω, *de degré inférieur au degré de* X, *est déterminé par la condition que le polynome*

$$\begin{vmatrix} f & 3X' & 0 & 0 \\ f' & 3X'' & 2X' & 0 \\ f'' & 3X''' & 5X'' & X' \\ f''' & 3X^{\text{IV}} & 8X''' & 6X'' \end{vmatrix} + (-1)^4 (3\,!)^2\, \omega X'^6$$

soit divisible par X.

Mais c'est là un résultat purement théorique, même dans les cas les plus simples.