NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 526-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__526_1>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2097.

(1908, p. 384)

Étant donnés, dans un plan, un cercle et un point H, *on considère tous les triangles qui ont pour orthocentre le point* H *et dont un côté est un diamètre* MM' *du cercle :*

1° *Trouver le lieu du troisième sommet* P ;

2° *Trouver l'enveloppe* (E) *des droites* PM, PM'. *Les points de contact de ces droites avec l'enveloppe étant* N *et* N', *faire voir que la droite* NN' *passe en* H *et est parallèle à* MM' ;

3° *Le cercle circonscrit au triangle* PMM' *passe par deux points fixes; il en est de même du cercle des neuf points. Les pieds des hauteurs du triangle* PMM' *étant* K *sur* MM', I *sur* PM, I' *sur* PM', *la droite* II' *passe par un point fixe.*

4° *La conique de foyer* H *inscrite au triangle* PMM' *est* *tangente à deux droites fixes; son petit axe a une longueur constante.*

G. FONTENÉ.

DEUXIÈME SOLUTION (¹),

Par l'AUTEUR.

1. Pour les deux premières Parties, il n'y a qu'à se reporter à la solution donnée précédemment (1909, p. 187); on peut seulement observer que la droite Δ est la directrice pour le foyer H, ce qui explique pourquoi la droite NN', polaire du point P situé sur cette directrice, passe par le foyer H et est parallèle à la droite MM' perpendiculaire à PH.

Pour la troisième Partie, d'une part, le cercle de diamètre PH' passe aux points M, M', h, de sorte que le cercle circonscrit PMM' passe par les points fixes H' et h. d'autre part, le cercle des neuf points, ayant pour diamètre la droite qui joint le milieu O de MM' au milieu de PH, passe au point O et au milieu ω du segment Hh; ces deux faits sont d'ailleurs liés par l'homothétie du cercle circonscrit et du cercle des neuf points $\left(\text{centre d'homothétie H, rapport } \frac{1}{2}\right)$. — La droite II' porte la corde commune au cercle fixe O et au cercle des neuf points; comme celui-ci passe par deux points fixes O et ω, la droite II' passe par un point fixe i, situé sur Oω. Si l'on considère en particulier le cercle des neuf points qui a pour diamètre Oω, on voit que le point i est sur la polaire de ω par rapport au cercle O.

Pour la quatrième Partie, on se reportera également à la solution déjà donnée.

2. On a rencontré le fait suivant : *si, aux extrémités* N *et* N' *d'une corde focale d'une conique, on mène les tangentes jusqu'à leurs rencontres en* M *et* I, M' *et* I', *avec le cercle principal,* M *et* M' *étant les projections du second foyer sur les tangentes,* I *et* I' *étant les projections du foyer par lequel passe la corde, la droite* MM' *est un diamètre du cercle principal, parallèle à la corde focale, la droite* II' *passe par un point fixe* (*Cf.* KOEHLER, *Exercices*, p. 109). Le fait que les deux points M et I se séparent a lieu

(¹) Voir une première solution, 1909, p. 186.

en vertu du double contact de la conique et du cercle principal; le fait que MM′ et II′ passent par deux points fixes s'explique comme il suit :

Dans une *corrélation générale*, un point A ayant pour transformée une droite b, de sorte que la droite b a pour point primitif le point A, si le point A décrit une droite a, la droite transformée b passe par un point fixe B, et l'on dira que ce point B est le transformé de la droite b, ou encore que la droite b est la droite primitive du point B :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{point A, droite transformée } b,\\ \text{droite } a\text{, point transformé B,}\\ \text{si A décrit } a,\ b \text{ passe par B;}\end{array}\right.$$

un point a une droite transformée et une droite primitive, ... Deux points M et M′ sont conjugués, dans cet ordre, si la transformée de M passe en M′, auquel cas la primitive de M′ passe en M; on définit d'une manière analogue deux droites conjuguées. Le lieu des points qui sont conjugués d'eux-mêmes est une conique S, l'enveloppe des droites qui sont conjuguées d'elles-mêmes est une conique Σ, et ces deux coniques sont bitangentes.

Une corrélation générale dépend de huit paramètres et se trouve déterminée par la connaissance des deux coniques S et Σ. Si l'on prend comme conique S le cercle donné, comme conique Σ l'enveloppe (E) obtenue, la droite transformée du point P est la droite MM′, la droite primitive étant la droite II′ (ou inversement, mais peu importe ici); la construction générale dont on a ici un exemple est due à Schröter; je l'ai retrouvée en 1892. (L'Hyperespace, *Propriétés métriques de la corrélation générale*, p. 47.) Dès lors, le point P décrivant la droite Δ, la droite MM′ passe par un point fixe O; la droite II′ passe également par un point fixe i.