NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. QUANTIN DE LA ROËRE

Sur les coniques et les quadriques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 514-524

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__514_0>

[L¹19d, L²10g]

SUR LES CONIQUES ET LES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

Par M. L. QUANTIN DE LA ROËRE.

Soient d'une part un système de coniques homofocales et d'autre part un ensemble de droites satisfaisant toutes à une condition donnée, c'est-à-dire ayant une enveloppe. Chacune de ces droites est tangente à l'une des coniques; par son point de contact, menons la tangente à la conique d'espèce différente passant en ce point, nous formerons ainsi un deuxième ensemble de droites ayant aussi une enveloppe. Ces deux enveloppes se déduisent l'une de l'autre et de la relation qui les lie découle une remarque intéressante relative à un mode de génération de la développée d'une conique : cette développée est en effet l'enveloppe des polaires réciproques de la conique, prises par rapport à toutes les coniques qui lui sont homofocales. Réciproquement une conique est l'enveloppe des polaires réciproques de sa développée.

Des considérations analogues s'appliquent à un système de quadriques homofocales en faisant correspondre à un ensemble de plans les normales aux quadriques menées par chaque point de contact; on arrive comme corollaire à la proposition suivante : « La surface des centres principaux de courbure d'une quadrique est l'enveloppe des polaires réciproques de cette quadrique par rapport aux quadriques qui lui sont homofocales. » Mais ici il n'y a pas de réciproque.

I. — Coniques.

1. Un système de coniques homofocales rapportées à leurs axes communs est représenté par l'équation

$$\frac{X^2}{A-\lambda}+\frac{Y^2}{B-\lambda}=1, \tag{1}$$

A et B étant des constantes et λ un paramètre variable. On suppose que l'axe des X passe par les foyers. Si φ désigne la distance du centre à l'un des foyers, on a

$$A-B=\varphi^2. \tag{2}$$

Une droite quelconque représentée par l'équation

$$uX+vY=1 \tag{3}$$

est tangente à l'une des coniques λ du système; le point de contact a pour coordonnées

$$x=u(A-\lambda), \qquad y=v(B-\lambda). \tag{3 bis}$$

La tangente à la courbe de l'autre espèce passant en ce point est la perpendiculaire à la droite (3) en son point de contact; elle a ainsi pour équation

$$vX-uY=uv\varphi^2. \tag{4}$$

Nous désignerons, pour abréger, les deux tangentes (3) et (4) sous le nom de *droites* ou *tangentes correspondantes*.

2. Lorsque les coefficients u et v des droites (3) et (4), au lieu d'être déterminés, sont simplement assujettis à vérifier une relation

$$F(u,v)=0, \tag{5}$$

on aura deux ensembles de droites.

Le premier ensemble formé par les droites (3) a une enveloppe dont l'équation s'obtient suivant la règle habituelle en éliminant u et v entre les relations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} uX + vY = 1, \\ Y\dfrac{\partial F}{\partial u} - X\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0, \\ F(u, v) = 0. \end{cases}$$

Les droites (4) ont pour enveloppe la courbe représentée par l'équation résultant de l'élimination de u et v entre

$$(7)\qquad \begin{cases} vX - uY = uv\varphi^2, \\ \dfrac{u^2}{X}\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{v^2}{Y}\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0, \\ F(u, v) = 0. \end{cases}$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe du premier ensemble (3) est l'équation (5). Pour les droites (4) l'enveloppe a pour équation tangentielle le résultat de la substitution dans (5) de $\frac{1}{u\varphi^2}$ et $-\frac{1}{v\varphi^2}$ à u et v; cette équation est donc

$$(8)\qquad F\left(\frac{1}{u\varphi^2}, -\frac{1}{v\varphi^2}\right) = 0.$$

3. L'enveloppe des droites (3) a une polaire réciproque par rapport à chacune des coniques (1); l'équation de cette polaire s'obtient comme on le sait en remplaçant, dans (5), u et v respectivement par $\frac{x}{A-\lambda}$ et $\frac{y}{B-\lambda}$; elle est donc représentée en coordonnées ponctuelles par

$$(9)\qquad F\left(\frac{x}{A-\lambda}, \frac{y}{B-\lambda}\right) = 0.$$

En faisant varier λ dans cette équation, on obtient les polaires par rapport à toutes les coniques du système homofocal; on a ainsi une famille de courbes : leur enveloppe s'obtient en éliminant λ entre l'équation (9) et sa dérivée par rapport à ce paramètre. Pour simplifier l'écriture laissons dans (9) les variables primitives u et v qui sont des fonctions de λ définies par les relations (3 *bis*), l'enveloppe de ces courbes s'obtiendra donc en éliminant u, v et λ entre les quatre équations :

$$F(u, v) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0,$$
$$u = \frac{x}{A - \lambda}, \qquad v = \frac{y}{B - \lambda}.$$

Éliminant λ entre les deux dernières, on trouve

$$vx - uy = uv\varphi^2;$$

on en tire aussi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2}{x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v^2}{y}.$$

On voit qu'on retombe sur le groupe d'équations (7), dont la courbe obtenue n'est autre que l'enveloppe du second ensemble de droites. En raison de la réciprocité des deux ensembles de droites, il est évident qu'en opérant comme nous venons de le faire en partant du second ensemble, on arriverait à l'enveloppe du premier. Donc, en désignant pour abréger sous le nom de *courbes correspondantes* les enveloppes des deux ensembles, on aura la proposition suivante :

Chacune des courbes correspondantes est l'enveloppe des polaires réciproques de l'autre.

Il est aisé de voir que les développements qui précèdent s'appliquent, avec de légères modifications dans les formules, à un système de paraboles ayant même foyer et même axe.

4. Considérons maintenant une conique quelconque, ellipse, hyperbole ou parabole, et d'autre part le système des coniques qui lui sont homofocales ; prenons la conique considérée pour enveloppe du premier ensemble de droites : chacune de ces dernières a pour correspondante la normale à cette conique au point où elle lui est tangente ; l'enveloppe du deuxième ensemble est donc l'enveloppe des normales de la conique, c'est-à-dire la développée de cette courbe. En appliquant à ce cas particulier la proposition précédente, nous avons le théorème déjà mentionné.

La développée d'une conique est l'enveloppe de ses polaires réciproques prises par rapport aux coniques qui lui sont homofocales, et réciproquement :

Une conique est l'enveloppe des polaires réciproques de sa développée, les polaires étant prises par rapport aux coniques homofocales à celle qui est donnée.

En effet, les tangentes de la développée ont pour droites correspondantes les tangentes de la conique.

Comme application, cherchons la développée de la conique

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1;$$

elle a pour équation tangentielle

$$Au^2+Bv^2=1,$$

la polaire réciproque par rapport à une conique qui lui est homofocale est représentée par l'équation

$$\frac{Ax^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{By^2}{(B-\lambda)^2}=1,$$

λ étant le paramètre arbitraire. En dérivant par rapport à ce paramètre, il vient

$$\frac{Ax^2}{(A-\lambda)^3}+\frac{By^2}{(B-\lambda)^3}=0;$$

on a à éliminer λ entre ces deux équations ; la seconde donne

$$\frac{B-\lambda}{A-\lambda}=-\frac{B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}},$$

d'où

$$\frac{Ax^2}{(A-\lambda)^2}=\frac{1}{\varphi^4}\left(A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^2 A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}},$$

de même

$$\frac{By^2}{(B-\lambda)^2}=\frac{1}{\varphi^4}\left(A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^2 B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, on arrive facilement à l'équation de la développée sous sa forme habituelle

$$A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=\varphi^{\frac{4}{3}}.$$

On a immédiatement l'équation tangentielle de cette courbe en remplaçant dans celle de la conique u et v respectivement par $\frac{1}{u\varphi^2}$ et $-\frac{1}{v\varphi^2}$, ce qui donne

$$Bu^2+Av^2=\varphi^4u^2v^2$$

En partant de cette équation et opérant comme nous venons de le faire, on retrouve bien, pour l'enveloppe des polaires réciproques de cette développée, l'équation de la conique sous la forme ponctuelle, ce qui vérifie la réciproque de la proposition.

II. — Quadriques.

5. L'équation

$$(1)\qquad \frac{X^2}{A-\lambda}+\frac{Y^2}{B-\lambda}+\frac{Z^2}{C-\lambda}=1,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire et A, B, C des constantes, représente un système de quadriques homofocales. Nous supposons les axes disposés de telle sorte que $A > B > C$. En désignant par φ, φ_1, φ_2 les demi-distances focales des sections principales, on a

$$A - B = \varphi^2, \qquad A - C = \varphi_1^2, \qquad B - C = \varphi_2^2;$$

d'où

$$\varphi^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 0.$$

Un plan quelconque

$$(2) \qquad uX + vY + wZ = 1$$

est tangent à l'une des quadriques, λ en un point ayant pour coordonnées :

$$(3) \quad x = u(A - \lambda), \qquad y = v(B - \lambda), \qquad z = w(C - \lambda).$$

La normale à la quadrique λ en ce point est la perpendiculaire au plan (2) ; on obtient d'ailleurs immédiatement ses équations en éliminant λ entre les trois égalités (3), puis en remplaçant dans le résultat x, y, z par les coordonnées courantes X, Y, Z. On trouve ainsi que cette normale est définie par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} vZ - wY = -vw\varphi_2^2, \\ wX - uZ = wu\varphi_1^2, \\ uY - vX = -uv\varphi^2. \end{cases}$$

Nous dirons que cette normale *correspond* au plan (u, v, w) et réciproquement ; dans ce qui suit nous désignerons sous le nom de *normale* une droite tangente à l'une quelconque des quadriques du système.

6. On voit par les équations (4) que les normales d'un système homofocales dépendent de trois paramètres u, v, w; leur ensemble forme ainsi un complexe.

Lorsque ces trois paramètres sont liés par une équation

$$(5) \qquad F(u, v, w) = 0,$$

les normales correspondantes ne dépendent plus que de deux paramètres ; elles forment alors une congruence ; mais cette dernière n'est pas en général ce qu'on nomme habituellement une *congruence de normales*, car les droites qui la composent ne sont pas en général toutes normales à une *même* surface.

En appliquant une règle connue, la *surface focale* de la convergence s'obtiendra en éliminant u, v, w entre les équations (4) des normales, la relation suivante

$$(6) \qquad \frac{u^2}{X}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{v^2}{Y}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{w^2}{Z}\frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

et l'équation (5). Les coordonnées des deux points focaux situés sur chaque normale sont données par les équations (4) et la relation (6).

Les paramètres u, v, w des normales sont aussi les coordonnées des plans tangents correspondants de ces normales ; par suite, l'équation (5) à laquelle doivent satisfaire ces paramètres est l'équation tangentielle de l'enveloppe de ces plans. Ainsi, établir une relation entre les paramètres des normales revient à donner une surface à laquelle tous les plans correspondants sont tangents.

7. La polaire réciproque de la surface (5) par rapport à l'une des quadriques du système a, comme on le sait, pour équation

$$(7) \qquad F\left(\frac{x}{A-\lambda}, \frac{y}{B-\lambda}, \frac{z}{C-\lambda}\right) = 0.$$

En faisant varier λ, on obtient une famille de surfaces à un seul paramètre; l'équation de son enveloppe est le résultat de l'élimination de λ entre l'équation (7) et sa dérivée par rapport à ce paramètre. En opérant d'une manière analogue à celle employée pour les coniques, on retrouve les formules (4), (6) et (5). Les opérations à effectuer sont donc les mêmes que celles relatives à la surface de la congruence. Ces deux surfaces sont donc identiques, d'où :

La surface focale d'une congruence de normales d'un système homofocal est l'enveloppe des polaires réciproques de la surface, enveloppe des plans correspondants de ces normales, ces polaires réciproques étant prises par rapport à toutes les quadriques du système.

De même que pour le cas des coniques, ce que nous venons de dire s'applique, sauf modifications dans les formules, à un système de paraboloïdes homofocaux; ce qui suit s'applique donc à une quadrique quelconque.

8. Supposons maintenant qu'on prenne, pour l'équation (5), l'équation tangentielle de l'une des quadriques du système homofocal, quadrique qui peut être considérée comme quelconque. Les normales correspondantes des plans tangents formeront l'ensemble des normales de cette quadrique (on a ainsi dans ce cas une véritable congruence de normales); la surface focale deviendra la surface des centres principaux de courbure. Donc :

La surface des centres principaux de courbure d'une quadrique est l'enveloppe des polaires réciproques de cette quadrique prises par rapport à toutes celles qui lui sont homofocales.

C'est la proposition énoncée au début. Ce théorème est analogue à celui relatif aux coniques, mais il n'a pas de réciproque.

On déduit immédiatement du théorème qui précède l'équation tangentielle, bien connue d'ailleurs, de la surface des centres d'une quadrique :

Soit la quadrique

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1,$$

qui a pour équation tangentielle

$$A u^2 + B v^2 + C w^2 = 1.$$

Sa polaire réciproque par rapport à une quadrique homofocale est représentée par l'équation

$$\frac{A x^2}{(A-\lambda)^2} + \frac{B y^2}{(B-\lambda)^2} + \frac{C z^2}{(C-\lambda)^2} = 1,$$

qui, exprimée en coordonnées tangentielles, devient

$$\frac{(A-\lambda)^2}{A} u^2 + \frac{(B-\lambda)^2}{B} v^2 + \frac{(C-\lambda)^2}{C} w^2 = 1.$$

Développant cette équation par rapport au paramètre λ, il vient :

$$\left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C}\right)\lambda^2 + 2(u^2 + v^2 + w^2)\lambda \\ + A u^2 + B v^2 + C w^2 - 1 = 0.$$

L'enveloppe des courbes représentées par cette équation s'obtient, comme on le sait, en exprimant que cette équation du second degré en λ a ses deux racines égales. L'équation de la surface des centres est donc

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 = (A u^2 + B v^2 + C w^2 - 1)\left(\frac{a^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C}\right).$$

C'est la forme sous laquelle elle est généralement connue; on peut l'écrire aussi en la développant

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = \frac{v^2 w^2}{BC} \varphi_2^4 + \frac{w^2 u^2}{CA} \varphi_1^4 + \frac{u^2 v^2}{AB} \varphi^4.$$