# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 11 (1911), p. 471-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__471_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 2163.

(1910, p. 479.)

*Étant donnés un tétraèdre et une droite, si les coordonnées de la droite rapportées au tétraèdre sont* $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, *il existe deux systèmes de quatre droites ayant pour coordonnées :*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(d)$ | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $t$ | $u$ |
| $(a)$ | $-p$ | $q$ | $r$ | $-s$ | $t$ | $u$ |
| $(b)$ | $p$ | $-q$ | $r$ | $s$ | $-t$ | $u$ |
| $(c)$ | $p$ | $q$ | $-r$ | $s$ | $t$ | $-u$ |
| $(\delta)$ | $p$ | $q$ | $r$ | $-s$ | $-t$ | $-u$ |
| $(\alpha)$ | $-p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $-t$ | $u$ |
| $(\beta)$ | $p$ | $-q$ | $r$ | $-s$ | $t$ | $-u$ |
| $(\gamma)$ | $p$ | $q$ | $-r$ | $-s$ | $-t$ | $u$. |

*Chacune des droites du premier système rencontre chacune des droites du second système, et les rapports anharmoniques des deux systèmes sont égaux; on a, par exemple,*

$$(d, a, b, c) = (\delta, \alpha, \beta, \gamma) = -\frac{qt}{ru}.$$

*Réciproquement, si deux systèmes de quatre droites sont tels que chaque droite du premier système rencontre chaque droite du second système, les rapports anharmoniques des deux systèmes étant égaux, ces deux systèmes dérivent d'un tétraèdre de la manière indiquée ci-dessus.*

(G. Fontené.)

SOLUTION,

Par M. R. Bouvaist.

Soit ABCD le tétraèdre donné, et soient $m$, $n$, $p$, $q$ les points d'intersection d'une droite $(d)$ avec les faces BCD, ACD, ABD, ABC de celui-ci: il existe une quadrique $\Sigma$ et une seule conjuguée au tétraèdre ABCD et passant par $d$. Soit $\Sigma'$ une quadrique conjuguée à ABCD et tangente à $d$. Le plan A$d$ coupe $\Sigma$ et $\Sigma'$ suivant deux coniques bitangentes; or, il coupe $\Sigma$ suivant deux génératrices $d$ et $\delta$, la génératrice $\delta$ est donc tangente à $\Sigma'$, elle rencontre, de plus, $d$ dans le plan polaire de A, c'est-à-dire en $m$. Les plans B$d$, C$d$, D$d$ nous donneront, de même, les génératrices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, tangentes à $\Sigma'$ et rencontrant $d$ en $n$, $p$, $q$. Les plans B$\delta$, C$\delta$, D$\delta$ donneront de même les génératrices $a$, $b$, $c$ du système $d$ rencontrant $\delta$ en ses points $n'$, $p'$, $q'$ d'intersection avec les droites A$n$, A$p$, A$q$, et l'on aura évidemment

$$(d, a, b, c) = \mathrm{A}(m, n, p, q) = (\delta, \alpha, \beta, \gamma).$$

Réciproquement, soient deux systèmes de quatre droites $d$, $a$, $b$, $c$, $\delta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, tels que chaque droite du premier système rencontre chaque droite du second système, les rapports anharmoniques des deux systèmes étant égaux. Soient $m$ le point d'intersection de $d$ et $\delta$; $n$, $p$, $q$ les points d'intersection de $d$ avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $n'$, $p'$, $q'$ les points d'intersection de $\delta$ avec $a$, $b$, $c$; puisque

$$(mnpq) = (mn'p'q'),$$

les droites $nn'$, $pp'$, $qq'$ sont concourantes en un point A. Les droites $d$ et $\alpha$, $d$ et $\beta$, $d$ et $\gamma$ nous donneront de même les points B, C, D.

La construction de ces points montre qu'ils sont respectivement sur les droites d'intersection des plans $d\alpha$ et $\delta a$, $d\beta$ et $\delta b$, $d\gamma$ et $\delta c$. Or, par suite de l'égalité du rapport anharmonique des deux systèmes de quatre droites, ces plans se correspondent homographiquement et le plan $d\delta$ est à lui-même son homologue ; il en résulte que le plan BCD passe par $m$ contacts du plan tangent $d\delta$ mené par A à la quadrique $\Sigma$ contenant les huit droites données ; ce plan BCD contient de même les contacts de $\Sigma$ avec les plans $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ passant par A. A est donc le pôle de BCD par rapport à $\Sigma$. D'où l'on peut conclure que le tétraèdre ABCD est conjugué à $\Sigma$, et nous retombons sur la définition donnée plus haut des systèmes de droites considérés.

## 2164.

(1910, p. 480.)

*Les quadriques $\Sigma'$ en nombre doublement infini, qui sont conjuguées par rapport à un tétraèdre donné, et qui sont tangentes à une droite donnée $d$ sont tangentes à deux systèmes de quatre droites $(d, a, b, c)$ et $(\delta, \alpha, \beta, \gamma)$; l'une de ces quadriques $\Sigma_0$ contient les huit droites. Les quadriques du faisceau ponctuel défini par la quadrique $\Sigma_0$ et l'une des quadriques du système font partie du système; il en est de même des quadriques du faisceau tangentiel défini par la quadrique $\Sigma_0$ et l'une des quadriques du système ; les faisceaux ponctuels sont en nombre simplement infini ; il en est de même des faisceaux tangentiels et chaque quadrique $\Sigma$ est déterminée par le faisceau ponctuel et par le faisceau tangentiel dont elle fait partie. L'enveloppe des plans polaires d'un point P par rapport aux quadriques $\Sigma$ est une conique dont le plan est le plan polaire du point P par rapport à la quadrique $\Sigma_0$ et qui est inscrite au tétraèdre; le lieu des pôles d'un plan $p$ par rapport aux quadriques $\Sigma$ est un cône dont le sommet est le pôle du plan $p$ par rapport à la quadrique $\Sigma_0$ et qui est circonscrit au tétraèdre.* (G. Fontené.)

**SOLUTION,**

Par M. R. Bouvaist.

Soient ABCD le tétraèdre donné, $\Sigma_0$ la quadrique conjuguée à ABCD, et passant par $d$, le plan A$d$ coupe $\Sigma_0$ suivant deux génératrices $d$ et $\delta$ et une quadrique $\Sigma'$ suivant une conique $\Gamma$ tangente à $d$ ; de plus, A a même polaire par rapport à $d\delta$ et à $\Gamma$ ; il en résulte que $\delta$ est tangente à $\Gamma$. Les plans B$d$, C$d$, D$d$, B$\delta$, C$\delta$, D$\delta$ nous donnent de même des droites $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tangentes à $\Sigma'$ et situées sur $\Sigma_0$. Les huit droites ainsi obtenues sont visiblement des tangentes à la biquadratique commune à $\Sigma_0$ et $\Sigma'$, et sont de même des génératrices de la développable circonscrite à ces deux surfaces. Les faisceaux ponctuels et tangentiels en nombre simplement infini déterminés par $\Sigma_0$ et une quadrique $\Sigma'$ ne contiennent par suite que des quadriques du système $\Sigma'$. Particulariser le faisceau ponctuel auquel appartient une quadrique $\Sigma$, revient à donner le point où cette surface touche $d$, et particulariser le faisceau tangentiel auquel appartient $\Sigma'$, c'est se donner le plan tangent à cette surface suivant $d$ ; la donnée de ces deux faisceaux détermine par conséquent complètement $\Sigma$.

Les quadriques $\Sigma$ tangentes à $d$ au même point $\alpha$ forment un faisceau ponctuel, les plans polaires d'un point P relatifs à ces quadriques passent donc par une droite fixe D, située dans le plan polaire de P par rapport à $\Sigma_0$, puisque $\Sigma_0$ est l'une des quadriques $\Sigma$. Cherchons, lorsque $\alpha$ décrit $d$, l'enveloppe de ces droites D dans le plan polaire de P par rapport à $\Sigma_0$. Parmi les quadriques $\Sigma$ tangentes à $d$ en $\alpha$, il en est une qui passe par P, le plan $\pi$ tangent à cette quadrique en P passe par la droite D. Soit $\Delta$ une droite quelconque passant par P : les quadriques conjuguées à ABCD et tangentes à $\Delta$ en P forment un faisceau ponctuel ; deux d'entre elles sont tangentes à $d$ ; il y a, par suite, deux plans $\pi$ passant par une droite $\Delta$ et ces plans enveloppent un cône du second ordre, et les droites L enveloppent la conique section de ce cône par le plan polaire de P par rapport à $\Sigma_0$. Cette conique est d'ailleurs tangente aux faces du tétraèdre ABCD, puisque ces faces sont les plans polaires de P par rapport aux coniques du système $\Sigma$.

De plus, le système $\Sigma$ se transforme en lui-même par polaires réciproques relativement à $\Sigma_0$ ; on en conclut immédiatement que le lieu des pôles d'un plan $p$, par rapport à ces quadriques, est un cône circonscrit au tétraèdre, et ayant pour sommet le pôle de $p$ par rapport à $\Sigma_0$.

Autre solution par M. Klug.

## 2169.

(1911, p. 93.)

*Si la courbe* (M) *est le lieu des points* M *d'où l'on peut mener à deux courbes données* (A) *et* (B) *des tangentes* MA *et* MB *égales entre elles, et si* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont les centres de courbure répondant respectivement aux points* A *et* B :

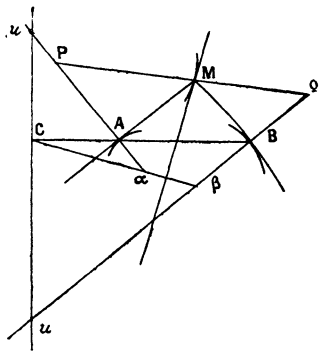
1° *La tangente en* M *à la courbe* (M) *est perpendiculaire à la droite* $\alpha\beta$;

2° *Le point où la droite* AB *touche son enveloppe est à sa rencontre avec la droite* $\alpha\beta$. (M. d'Ocagne.)

### SOLUTION,

Par M. N. Abramescu.

1° Soient MP la normale à la courbe (M) aux points M et P, Q les intersections de cette normale avec $A\alpha$ et $B\beta$. Le




segment MA a l'extrémité M sur la courbe (M), et reste tangent à la courbe (A) ; donc la variation de ce segment est donnée par l'expression

$$\frac{d(\mathrm{MA})}{d\theta} = \alpha \mathrm{P},$$

$d\theta$ étant l'angle de contingence de (A). Remplaçant $d\theta$ par

$$\frac{d(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}},$$

la variation de longueur de MA est égale à

$$\frac{\alpha \mathrm{P}\, d(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}}.$$

De même, la variation de MB est

$$\frac{\beta \mathrm{Q}\, d(\mathrm{M})}{\mathrm{MQ}}.$$

Or, MA = MB ; donc leurs variations sont égales, et donc

$$\frac{\alpha \mathrm{P}}{\mathrm{MP}} = \frac{\beta \mathrm{Q}}{\mathrm{MQ}},$$

ou

$$\frac{\alpha \mathrm{P}}{\dfrac{\mathrm{MA}}{\cos \mathrm{AMP}}} = \frac{\beta \mathrm{Q}}{\dfrac{\mathrm{MB}}{\cos \mathrm{BMQ}}}.$$

D'où

$$\alpha \mathrm{P} \cos \mathrm{AMP} = \beta \mathrm{Q} \cos \mathrm{BMQ},$$

ce qui prouve que les distances de $\alpha$ et $\beta$ à la droite MP sont égales ; donc la normale en M est parallèle à $\alpha\beta$, ou que la tangente en M est perpendiculaire à $\alpha\beta$ (¹).

2° Soient C le point de contact de la droite AB avec son enveloppe et $u$ et $v$ les intersections de la normale en C à l'enveloppe de AB avec A$\alpha$ et B$\beta$. On sait que

$$(1)\qquad \frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{A}u}{\mathrm{B}v}, \qquad \frac{d(\mathrm{B})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{B}\beta}{\mathrm{MQ}}, \qquad \frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{A}\alpha},$$

les centres instantanés de rotation étant respectivement $u$, $v$ ; $\beta$, Q ; P, $\alpha$.

(¹) Cette première partie est connue : MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, p. 46.

Multipliant les relations (1), on trouve le théorème de Mannheim :

$$(2)\qquad \frac{Au}{Bv}\,\frac{B\beta}{A\alpha}\,\frac{MP}{MQ}=1.$$

Les triangles $AuC$, $BvC$, rectangles, étant semblables, on a

$$\frac{Au}{Bv}=\frac{CA}{CB},$$

et remplaçant en (2), on trouve

$$(3)\qquad \frac{CA}{CB}\,\frac{B\beta}{A\alpha}\,\frac{MP}{MQ}=1.$$

M′ étant l'intersection de la tangente en M avec $\alpha\beta$, on a des triangles APM, BMQ,

$$MP=\frac{MA}{\sin AMM'}=\frac{MA}{\sin A\alpha\beta},\qquad MQ=\frac{MB}{\sin B\beta\alpha}.$$

La relation (3) devient

$$(4)\qquad \frac{CA}{CB}=\frac{\sin A\alpha\beta}{\sin B\beta\alpha}\,\frac{A\alpha}{B\beta}.$$

Soit C′ le point où la droite $\alpha\beta$ coupe la droite AB. On a

$$\frac{A\alpha}{C'A}=\frac{\sin\alpha C'A}{\sin A\alpha\beta},\qquad \frac{B\beta}{C'B}=\frac{\sin\beta C'B}{\sin\alpha\beta B};$$

d'où

$$\frac{A\alpha}{B\beta}\,\frac{C'B}{C'A}=\frac{\sin\alpha\beta B}{\sin A\alpha\beta},$$

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{\sin A\alpha\beta}{\sin B\beta\alpha}\,\frac{A\alpha}{B\beta},$$

ce qui prouve que les points C et C′ se confondent.

Donc, le point où AB touche son enveloppe est l'intersection des droites AB et $\alpha\beta$.

Autre solution par M. GISOLF.

## 2171.

( 1911, p. 94. )

*Étant donnés dans un plan un point et deux droites parallèles, on considère une sphère variable ayant pour* *diamètre le segment intercepté par les deux parallèles sur une droite tournant autour du point. Montrer que l'enveloppe de cette sphère est un ellipsoïde de révolution aplati ou bien un hyperboloïde de révolution à une nappe suivant la position du point fixe par rapport aux deux parallèles.* (KLUG.)

SOLUTION,

Par M. N. ABRAMESCU.

Prenons pour les axes coordonnés la parallèle par O aux droites données A et B, et pour $Oy$ la perpendiculaire en O. Les équations des droites A et B étant

$$(A)\quad y = a, \qquad (B)\quad y = b,$$

les points d'intersection de ces droites avec une sécante variable ($y = \lambda x$) menée par O seront

$$M\left(\frac{a}{\lambda}, a\right), \qquad P\left(\frac{b}{\lambda}, b\right).$$

L'équation de la sphère de diamètre MP sera

$$\left(x - \frac{a+b}{2\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{(a-b)^2}{4\lambda^2} + \frac{(a-b)^2}{4},$$

ou

$$(1)\quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a-b}{\lambda}x - (a+b)y + \frac{ab}{\lambda^2} - ab = 0.$$

L'enveloppe de cette sphère s'obtient en éliminant $\lambda$ entre les équations (1) et sa dérivée par rapport à $\lambda$:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{a+b}{2ab}x.$$

On trouve :

$$(2)\qquad -\frac{x^2}{ab} + \frac{\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(a-b)^2}{4}} + \frac{z^2}{\frac{(a-b)^2}{4}} = 1.$$

Transportant les axes tellement que $Ox$ soit la parallèle équidistante des droites A et B, l'équation (2) devient

$$-\frac{x^2}{ab}+\frac{y^2}{\frac{(a-b)^2}{4}}+\frac{z^2}{\frac{(a-b)^2}{4}}=1,$$

ce qui représente un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution. D'après l'équation (2), on voit que cette enveloppe est un ellipsoïde ou un hyperboloïde suivant le signe de $ab$, négatif si O est entre les parallèles données, et positif si le point est extérieur à la région comprise entre ces parallèles.

## Autre solution,

Par M. R. Bouvaist.

Soient A le point, $\Delta$ et $\Delta'$ les deux parallèles données. L'enveloppe des droites telles que les segments interceptés sur elles par $\Delta$ et $\Delta'$ soient vus d'un point F du plan sous un angle droit est une conique du foyer F, admettant $\Delta$ et $\Delta'$ pour tangentes perpendiculaires à l'axe focal.

Il y a, par suite, deux des sphères considérées passant par le point F, ayant pour diamètre les tangentes issues de A à la conique précédente.

On voit que l'enveloppe des cercles, sections de ces sphères, n'est autre que le lieu des foyers des coniques passant par A et admettant $\Delta$ et $\Delta'$ comme tangentes perpendiculaires à l'axe focal. Si A' est le symétrique de A par rapport à la parallèle D équidistante de $\Delta$ et $\Delta'$, on a visiblement $AF \pm A'F' = 2d$, $2d$ étant la distance de $\Delta$ et $\Delta'$, le signe + correspondant au cas où A est entre $\Delta$ et $\Delta'$, le signe — au cas contraire.

L'enveloppe des cercles sections des sphères par le plan considéré est par suite une ellipse ou une hyperbole, et l'enveloppe des sphères la surface engendrée par ces courbes tournant autour de D, c'est-à-dire un ellipsoïde aplati ou un hyperboloïde à une nappe.

Remarque. — La solution précédente démontre le théorème suivant :

*Étant donnée une conique et une corde focale quelconque de cette conique, cette corde coupe les tangentes* *perpendiculaires à l'axe focal en* A *et* A′, *le cercle de diamètre* AA′ *est bitangent à la conique.*