NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Sur les fonctions entières d'ordre nul

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 448-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__448_1>

[D4a]

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;

PAR M. G. VALIRON.

Je me propose dans ce travail de préciser la relation entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière d'ordre nul et la distribution de ses zéros, principalement dans certains cas de croissance régulière.

1. Désignons par a_n le $n^{\text{ième}}$ zéro, et par r_n son

module; par hypothèse la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^k}$$

converge quel que soit le nombre positif k. Par suite, la quantité

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\log r_n}$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. On peut alors trouver d'une infinité de façons [1] des fonctions $\rho(x)$, définies et continues pour $x > r_{n_0}$, et telles que :

1° $\rho(x)$ décroît (ou du moins ne croît pas), et $\lim\limits_{x=\infty} \rho(x) = 0$;

$\rho(x) \log x$ croît (ou ne décroît pas), et croît indéfiniment.

2° $\sigma_n \leqq \rho(r_n)$, quel que soit $n > n_0$;

$\sigma_n = \rho(r_n)$, pour une infinité de valeurs de n.

$\rho(x)$ sera appelé *un exposant net de la suite des zéros;* on voit qu'on a, pour $n > n_0$,

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)}. \tag{1}$$

2. Ceci posé considérons le produit canonique

$$f(z) = \prod_1 \left(1 - \frac{z}{a_n}\right);$$

en désignant par r le module de z, on a évidemment

$$|f(z)| \leqq \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{r_n}\right).$$

---

[1] Voir mon article : *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Mathematische Annalen*, B. 70, p. 472).

En définissant le nombre m par la double inégalité

$$(2)\qquad r_m \leqq r < r_{m+1},$$

nous avons, pour $n < m$,

$$1 + \frac{r}{r_n} < 2\frac{r}{r_n},$$

et par conséquent

$$|f(z)| < \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} 2^m \prod_{m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{r_n}\right).$$

D'autre part on a

$$1 + \frac{r}{r_n} < e^{\frac{r}{r_n}};$$

donc

$$\prod_{m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) < e^{r\sum\limits_{m+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}}.$$

Soit alors $\rho(x)$ un exposant de la suite des zéros, nous aurons pour $n > m$:

$$\rho(r_n) < \rho(r_{m+1}) < \rho(r);$$

d'où

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)} < r_n^{\rho(r)},$$

et par suite

$$\frac{1}{r^n} < \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(r)}}};$$

posons enfin

$$\text{M} = \text{partie entière de } r^{\rho(r)},$$

on aura

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{r_n} = \sum_{m+1}^{\text{M}+1}\frac{1}{r_n} + \sum_{\text{M}+2}^{\infty}\frac{1}{r_n} < \frac{\text{M}-m}{r} + \sum_{\text{M}+2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(r)}}}$$

$$< \frac{\text{M}-m}{r} + \int_{\text{M}+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{\rho(r)}}},$$

et comme

$$\int_{M+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\rho(r)}}} = \frac{\rho(r)}{1-\rho(r)} \frac{M+1}{(M+1)^{\frac{1}{\rho(r)}}} < (1+\varepsilon) \frac{r^{\rho(r)}}{r} \rho(r) \quad (^1),$$

nous aurons

$$r \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} < M - m + (1+\varepsilon)\rho(r)\, r^{\rho(r)} < (1+\varepsilon) r^{\rho(r)} - m.$$

Finalement nous obtenons

$$(3) \quad |f(z)| < \frac{r^m}{r_1 r_2 \dots r_m} 2^m e^{(1+\varepsilon)r^{\rho(r)}} e^{-m} < \frac{r^m}{r_1 r_2 \dots r_m} e^{(1+\varepsilon)r^{\rho(r)}}.$$

L'inégalité (3) et le théorème bien connu de M. Jensen montrent que l'on a

$$(4) \qquad M(r) = \frac{r^m}{r_1 r_2 \dots r_m} e^{\alpha r^{\rho(r)}} \qquad (0 < \alpha < 1+\varepsilon),$$

$M(r)$ désignant le maximum de $|f(z)|$ pour $z = r$.

3. Pour trouver une limite supérieure de $|f(z)|$ en fonction de l'exposant net, il reste à calculer une limite supérieure de l'expression

$$A = \frac{r^m}{r_1 r_2 \dots r_m} = \frac{r^M}{r_1 r_2 \dots r_m r^{M-m}},$$

M étant le nombre défini précédemment. Pour cela nous introduirons les nombres R_n définis par l'égalité

$$n = R_n^{\rho(R_n)}.$$

De cette définition résulte l'inégalité

$$R_n < r_n < r \qquad (n_0 < n \leqq M);$$

---

(1) Dans tout ce qui suit je désignerai par ε toute quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_m}$, ou $\frac{1}{m}$.

d'où il suit

$$A < K \frac{r^{M}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \dots R_M} \qquad (K \text{ fini}),$$

ou encore

$$A < K r^{M} e^{-\sum\limits_{n_0}^{M} \log R_n}.$$

Désignons pour un instant par $\varphi(x)$ la fonction inverse de $x^{\rho(x)}$; $\varphi(x)$ est une fonction croissante, telle que

$$\varphi(n) = R_n,$$

et par conséquent on a

$$\sum_{n_0}^{M} \log R_n = \int_{n_0}^{M+\theta} \log \varphi(x)\, dx + \theta' \log R_M \qquad (-1 < \theta' < 1),$$

en posant

$$M + \theta = r^{\rho(r)};$$

et en intégrant par parties

$$\int_{n_0}^{M+\theta} \log \varphi(x)\, dx = [x \log \varphi(x)]_{n_0}^{M+\theta} - \int_{n_0}^{M+\theta} \frac{x}{\varphi(x)}\, d[\varphi(x)].$$

En prenant $\varphi(x)$ pour variable dans la dernière intégrale, nous obtenons

$$\int_{n_0}^{M+\theta} \log \varphi(x)\, dx = (M + \theta) \log r - K_1 - \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x}\, dx$$

$$(K_1 \text{ fini}),$$

et ainsi

$$\sum_{n_1}^{M} \log R_n = M \log r + \theta \log r + \theta' \log R_M - K_1 - \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x}\, dx.$$

On aura donc

$$A < K e^{-\theta \log r - \theta' \log R_M + K_1 + \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx},$$

et comme

$$\frac{\log r}{\displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$,

$$A < e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}.$$

Puisqu'enfin

$$\frac{r\rho(r)}{\displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ [car cette expression est inférieure à $\rho(r)$], l'inégalité (3) donnera

$$(5) \qquad |f(z)| < e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}.$$

4. On peut obtenir, en partant de l'égalité (4), une égalité assez précise dans certains cas. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, croissante (ou ne décroissant pas), et telle que

$$r_n = \varphi(n),$$

et soit $\psi(x)$ la fonction inverse (qui peut avoir des discontinuités brusques).

L'égalité (4) s'écrit

$$M(r) = r^m e^{-\sum\limits_1^m \log\varphi(n)} e^{\alpha r\rho(r)}.$$

En opérant comme précédemment, on obtiendra

$$\sum_1^m \log\varphi(n) = m\log r + \theta\log r + \theta'\log r_m - K - \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx$$

(K constant),

ou encore comme

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log r}{\displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx} = 0,$$

$$\sum_{1}^{m} \log \varphi(n) = m \log r - (1+\varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx;$$

et par conséquent

$$(6)\quad \log \mathrm{M}(r) = (1+\varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx + \alpha r \rho(r) \quad (0 < \alpha < 1 + \varepsilon').$$

Cette égalité donnera une expression asymptotique de $\log \mathrm{M}(r)$, lorsque le second terme du deuxième membre sera négligeable devant le premier. En particulier, si l'on a

$$n = (1+\varepsilon) r_n^{\theta(r_n)},$$

la fonction $\theta(x)$ satisfaisant aux premières conditions du paragraphe 1, on aura

$$\log \mathrm{M}(r) = (1+\varepsilon') \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\theta(x)}}{x}\,dx.$$

Ceci montre que l'inégalité (5) est la plus précise que l'on puisse obtenir.

5. Il existe d'ailleurs une infinité de cercles $|z| = r$, sur lesquels le second membre de l'égalité (6) se réduit à son premier terme, et sur ces cercles on a

$$\log |f(z)| = (1+\varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx.$$

En effet, en supposant $r \neq r_n$, on a

$$|f(z)| > \prod_{1}^{\infty} \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right|;$$

posons toujours

$$r_m \leqq r < r_{m+1}$$

et

$$r_{m'} < \frac{r}{k} < r_{m'+1}, \qquad r_{m''} < k_1 r < r_{m''+1} \qquad (k_1 > 2),$$

on obtiendra facilement

$$|f(z)| > \prod_1^\infty \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right| = \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} \prod_1^{m'} \left(\frac{r - r_n}{r} \right)$$
$$\times \prod_{m'+1}^{m} \left(\frac{r - r_n}{r} \right) \prod_{m+1}^{m''} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right)$$
$$\times \prod_{m''+1}^{\infty} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right).$$

Or

$$\prod_1^{m'} \frac{r - r_n}{r} > \left(1 - \frac{1}{k} \right)^{m'} > e^{-hm'} \qquad (h \text{ fini});$$

d'après la définition de m'',

$$\prod_{m''+1}^{\infty} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right) > e^{-2 \sum\limits_{m''+1}^{\infty} \frac{r}{r_n}} > e^{-2 \sum\limits_{m+1}^{\infty} \frac{r}{r_n}},$$

et, d'après le calcul du paragraphe 2,

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{r}{r_n} < (1 + \varepsilon) r^{\rho(r)} - m;$$

donc

$$\prod_{m''+1}^{\infty} \frac{r_n - r}{r_n} > e^{-2(1+\varepsilon) r^{\rho(r)}}.$$

Enfin

$$\prod_{m'+1}^{m} \left(\frac{r - r_n}{r} \right) \prod_{m+1}^{m''} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right) > \prod_{m'+1}^{m''} | r - r_n | \frac{1}{(k_1 r)^{m'' - m'}},$$

d'où

$$|f(z)| > \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{-hm'} e^{-2(1+\varepsilon) r^{\rho(r)}} \frac{\prod_{m'+1}^{m''} |r - r_n|}{(k_1 r)^{m''-m'}},$$

ou

$$(7) \quad |f(z)| > \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{-H_1 r^{\rho(r)}} \frac{\prod_{m'+1}^{m''} |r - r_n|}{(k_1 r)^{m''-m}} \qquad (H_1 \text{ fini}).$$

Ceci posé, étant donné le nombre R, nous choisissons [1] r de la façon suivante, si n_R est le nombre des zéros compris entre les cercles de rayons R et KR $(K > 4)$, nous tracerons les cercles de rayon $R + (K - 1)R \frac{i}{\lambda n_R}$, $i = 1, 2, \ldots, \lambda n_R$, $(\lambda > 9)$, et nous exclurons certaines des couronnes formées de la façon suivante : si une couronne contient q zéros, elle est exclue ainsi que les q précédentes et les q suivantes ; si ces $2q$ couronnes contiennent r zéros, les r couronnes précédentes et suivantes sont exclues, etc. Comme il reste au moins $6n_R$ couronnes, on peut trouver un cercle pour lequel $\frac{r}{k} = R$, $k_1 r = KR$.

Nous aurons alors

$$|r_{m+i+1} - r| > (K - 1)\frac{k_1 r}{K} \frac{i}{\lambda n_R},$$

$$|r_{m-i} \quad - r| > (K - 1)\frac{k_1 r}{K} \frac{i}{\lambda n_R};$$

d'où

$$\prod_{m'+1}^{m''} |r - r_n| > \left[\frac{(K-1)k_1 r}{\lambda K}\right]^{m''-m'} \frac{\left[\left(\frac{n_R}{2}\right)!\right]^2}{n_R^{n_R}}$$

$$(\text{car } n_R = m'' - m')$$

---

[1] Procédé indiqué par M. Boutroux dans sa Thèse.

et

$$\frac{\prod\limits_{m'+1}^{m''} |r - r_n|}{(k_1 r)^{m''-m'}} > \left(\frac{K-1}{\lambda K}\right)^{m''-m'} e^{-\lambda' n_R} > e^{-H_2(m''-m')}$$

(λ' et H_2 finis),

mais puisque

$$m'' \leqq r_{m''}^{\rho(r_{m''})} < (k_1 r)^{\rho(r)} < (1+\varepsilon) r^{\rho(r)},$$

l'inégalité (7) devient

$$(8)\quad |f(z)| > \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{-H r^{\rho(r)}} = e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx - H r^{\rho(r)}}$$

(H fini).

En comparant avec les égalités (6) et (4), on voit que dans les couronnes considérées, on a

$$(9)\quad |f(z)| = \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{+A r^{\rho(r)}} = e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx + A r^{\rho(r)}}$$

(A fini).

Il reste à montrer que l'on peut déterminer R de façon que les seconds membres se réduisent à leur premier terme. Soit N un nombre tel que

$$N = r_N^{\rho(r_N)};$$

d'après le paragraphe 1, il existe une infinité de ces nombres ; nous prendrons

$$R = r_N^{1+\frac{\alpha}{\rho(r_N)\log r_N}} = r_N e^{\frac{\alpha}{\rho(r_N)}} \qquad (\alpha \text{ fini}).$$

Nous aurons ainsi

$$r^{\rho(r)} = (kR)^{\rho(kR)} < (kR)^{\rho(r_N)} < (1+\varepsilon) r_N^{\rho(r_N)} e^{\alpha},$$

et d'autre part

$$\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} > \frac{r^N}{r_1 r_2 \ldots r_N} > \left(\frac{r}{r_N}\right)^N > e^{\frac{\alpha}{\rho(r_N)} r_N^{\rho(r_N)}};$$

il suit bien de là l'égalité

$$e^{r^{\rho(r)}} = \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m}\right)^{\varepsilon}$$

sur les cercles considérés et par suite l'égalité annoncée

$$(10) \qquad |f(z)| = \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m}\right)^{1+\varepsilon} = e^{(1+\varepsilon')\int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx},$$

valable sur une infinité de cercles ([1]).

6. Il résulte de ce qui précède que l'on doit prendre pour limite supérieure du maximum $M(r)$ du module de $f(z)$ pour $|z| = r$, une expression de la forme

$$e^{\int_{r_0}^{r}\frac{\mu(x)}{x}dr},$$

où $\mu(x)$ est une fonction croissante de x, mais croissant moins vite que x^{ε}, $\varepsilon > 0$. Nous dirons qu'une fonction d'ordre nul est *parfaitement régulière* lorsqu'on a

$$(11) \qquad M(r) = e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r}\frac{\mu(x)}{x}dx},$$

la fonction $\mu(x)$ satisfaisant à certaines conditions. Si l'on pose

$$(12) \qquad \int_{r_0}^{r}\frac{\mu(x)}{x}dx = r^{\nu(r)}\log r.$$

on constate aisément que la fonction $\nu(r)\log r$ est croissante; d'autre part $\nu(r)$ doit tendre vers zéro, nous supposerons que $\mu(x)$ est telle que la fonction $\nu(x)$ décroît constamment (ou du moins ne croît pas).

Cette hypothèse faite, il résulte du théorème de

([1]) Ce théorème est une précision de celui que j'avais démontré dans les *Mathematische Annalen* (théorème de M. Wiman).

Jensen l'inégalité

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n < e^{(1+\varepsilon)r^{\nu(r)}\log r},$$

d'où

$$n < \frac{(1+\varepsilon)r^{\nu(r)}\log r}{\log r - \log r_n},$$

valable quels que soient r et n, en prenant

$$r = r_n^{1+\frac{1}{\nu(r_n)\log r_n}}.$$

on aura

$$n < (1+\varepsilon)\nu(r_n)\log r_n \, . \, e r_n^{\nu(r_n)},$$

et comme le second membre de cette inégalité est une fonction croissante et que son logarithme divisé par $\log r_n$ décroît, il existe *un exposant net* $\rho(x)$ de la suite des zéros tel que

$$x^{\rho(x)} < (1+\varepsilon)\nu(x)\log x \, . \, e x^{\nu(x)}.$$

En appliquant l'égalité (6) on obtiendra alors

$$(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx + \alpha\,\nu(r)\log re\,.\,r^{\nu(r)} = (1+\varepsilon_1)r^{\nu(r)}\log r.$$

ou encore comme $\nu(x)$ tend vers zéro, et d'après l'égalité (12),

$$(13)\qquad \int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx = (1+\varepsilon_2)\int_{r_0}^{r}\frac{\mu(x)}{x}dx;$$

cette égalité donne le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon r puisque ce nombre n est égal à la partie entière de $\psi(r)$. Tout revient à calculer une valeur approchée de $\psi(r)$. Or de l'égalité (13) on déduit

$$\int_{r}^{r'}\frac{\psi(x)}{x}dx = (1+\varepsilon_2)\int_{r}^{r'}\frac{\mu(x)}{x}dx + \varepsilon_3\int_{r}^{r}\frac{\mu(x)}{x}dx.$$

ε_2 et ε_3 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Déterminons r' par la condition

$$(14)\qquad \int_r^{r'} \frac{\mu(x)}{x}\,dx = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{r} \frac{\mu(x)}{x}\,dx,$$

et prenons r assez grand pour que $\varepsilon_3 < \varepsilon$; on aura

$$\int_r^{r'} \frac{\psi(x)}{x}\,dx = (1+\varepsilon_4)\int_r^{r'} \frac{\mu(x)}{x}\,dx,$$

de sorte que $\psi(x)$ est égal à $(1+\varepsilon)\mu(x)$ pour une valeur au moins de x comprise entre r et r', et par suite si l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mu(r')}{\mu(r)} = 1,$$

on aura

$$n = \psi(r) = (1+\varepsilon)\,\mu(r).$$

C'est-à-dire que de l'égalité (11) on déduit l'égalité

$$n = \mu(r_n)(1+\varepsilon).$$

Les conditions imposées à $\mu(x)$ sont les suivantes :

1° *La fonction* $\nu(r)$ *définie par l'égalité* (12) *est décroissante.*

2° *De l'égalité*

$$\int_0^{r'} \frac{\mu(x)}{x}\,dx = (1+\varepsilon)\int_0^{r} \frac{\mu(x)}{x}\,dx,$$

on déduit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mu(r')}{\mu(r)} = 1.$$

Cette deuxième condition s'obtient en modifiant l'égalité (14); elle est vérifiée toutes les fois qu'on a

$$\int_0^{r} \frac{\mu(x)}{x}\,dx = \mu(x)\,\chi(x)(1+\varepsilon),$$

$\chi(x)$ *étant une fonction croissante.*

En prenant par exemple pour valeur de $\log M(r)$ à $(1+\varepsilon)$ près,

1° $$\log r\, e^{A(\log_k r)^\alpha} \qquad (k \geqq 3);$$

2° $$(\log r)^{1+\alpha};$$

3° $$\log r\, e^{A(\log_2 r)^\alpha} \qquad (\alpha > 1);$$

4° $$r^{\frac{A}{\log_k r}} \qquad (k \geqq 2),$$

on obtiendra pour valeurs de $\nu(r)$ des fonctions décroissantes; d'autre part on aura pour $\mu(x)$ les valeurs suivantes :

1° $$e^{A(\log_k r)^\alpha}\left[1 + \frac{A\alpha(\log_k r)^{\alpha-1}}{\log_{k-1} r \ldots \log_2 r}\right] = (1+\varepsilon)e^{A(\log_k r)^\alpha};$$

2° $$(1+\alpha)(\log r)^\alpha;$$

3° $$e^{A(\log_2 r)^\alpha}[1 + A\alpha(\log_2 r)^{\alpha-1}] = (1+\varepsilon)A\alpha \log_2 r)^{\alpha-1} e^{A(\log_2 r)^\alpha};$$

4° $$r^{\frac{A}{\log_k r}} \frac{A}{\log_k r}(1+\varepsilon).$$

La remarque précédente s'applique, et, d'après les résultats du paragraphe 4, on obtient les égalités réciproques :

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)\log r\, e^{A(\log_k r)^\alpha},$$
$$n = (1+\varepsilon')e^{A(\log_k r)^\alpha} \qquad (k \geqq 3);$$

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)(\log r)^{1+\alpha},$$
$$n = (1+\varepsilon')(\log r)^\alpha(1+\alpha);$$

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)\log r\, e^{A(\log_2 r)^\alpha},$$
$$n = (1+\varepsilon')A\alpha(\log_2 r)^{\alpha-1} e^{A(\log_2 r)^\alpha} \qquad (\alpha > 1);$$

$$\log M(r) = (1+\varepsilon) r^{\frac{A}{\log_k r}},$$
$$n = (1+\varepsilon')\frac{A\, r^{\frac{A}{\log_k r}}}{\log_k r}.$$