Nouvelles annales de mathématiques

Paul Suchar

Sur les courbes planes qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 433-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__433_0>

[O'5j]

SUR LES COURBES PLANES, QUI SONT A ELLES-MÊMES LEURS POLAIRES RÉCIPROQUES;

PAR M. PAUL SUCHAR,
Professeur au Lycée de Pau.

1. Je me propose de déterminer les courbes planes qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques par rapport à un cercle, ainsi que les courbes qui coïncident avec leurs polaires réciproques par une rotation autour du centre du cercle directeur. Je dois d'abord signaler sur un sujet analogue un article de M. Fouret, *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leur propre polaire réciproque par rapport à une infinité de coniques* (*Bulletin de la Société philomatique*, 1877, p. 42-45). Dans cette Note, M. Fouret montre que les seules courbes possédant la propriété indiquée, sont les courbes triangulaires signalées par MM. Klein et Lie. Enfin, M. Appell a étudié, au point de vue géométrique, le problème que nous avons en vue, dans deux articles *Sur les courbes autopolaires* (*Bulletin de la Société mathématique*, 7 février 1894, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, mai 1894). Dans ces Notes, M. Appell désigne, sous le nom de *courbe* et *conique autopolaire*, une courbe qui est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à une conique donnée. M. Appell montre que la conique la plus générale, autopolaire, est bitangente à la conique fondamentale et dépend en outre de deux paramètres. En établissant une relation quelconque

entre les deux paramètres, M. Appell démontre que l'enveloppe de ces coniques se compose de la conique fondamentale donnée et d'une courbe C, qui, si elle ne se décompose pas en deux courbes distinctes, polaires réciproques l'une de l'autre, elle est autopolaire par rapport à la même conique fondamentale.

2. La recherche des courbes qui fait l'objet de notre travail, constitue un problème très général dont les solutions sont en nombre infini, et ne semblent pas devoir être comprises facilement dans une formule unique. Je suis parvenu à résoudre le problème dans sa généralité en le rattachant à la Mécanique. Je regarde les courbes cherchées comme étant les trajectoires décrites par un point matériel, et je démontre au n° 4 le théorème suivant :

Si, quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire d'un point matériel est plane, et si elle est à elle-même (la courbe hodographe) sa polaire réciproque par rapport à un cercle, la force qui le sollicite passe par (l'origine de l'hodographe) le centre du cercle directeur.

Rappelons encore un théorème que nous avons démontré dans les (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. II, 1902) et qui nous sera utile :

La courbe hodographe correspondant à la trajectoire décrite par un point matériel sous l'action d'une force centrale et ayant pour origine le centre de la force, coïncide, après une rotation de 90° autour de ce centre, avec la polaire réciproque de la trajectoire par rapport à un cercle ayant pour centre le centre de la force, et pour rayon la *racine carrée du nombre qui est la constante des aires.*

D'après ce dernier théorème, la recherche d'une solution s'obtiendra, en supposant la courbe comme étant la trajectoire décrite par un point matériel, sous l'action d'une force centrale, ayant pour centre le centre du cercle directeur. On effectue ensuite, sur les coordonnées du point, ainsi que sur le temps, une transformation convenable, ayant pour but de transformer la force en une autre également centrale, et le mouvement en un autre, ayant pour nouvelle trajectoire la courbe hodographe correspondant à la nouvelle trajectoire, ou bien la polaire réciproque de la même trajectoire, par rapport au cercle directeur. On disposera ensuite de la loi de la force qui est encore inconnue, pour que, par la même transformation, le premier mouvement se transforme en lui-même, et que la trajectoire se transforme en elle-même, le mouvement sur cette dernière trajectoire étant en général différent du premier. Remarquons que le problème étant ainsi présenté, il peut être considéré comme un exemple d'un problème résolu par M. Painlevé, *Sur la transformation des équations de la dynamique* (*Journal de Math.*, 4^e^ série, t. X, 1894). Je dois cependant faire remarquer qu'aucune restriction n'est faite sur la loi de la force. J'entends par là que la loi de la force peut dépendre aussi bien de la position du point matériel que des composantes de la vitesse de ce point sur les axes des coordonnées.

3. Soient x et y les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy, d'un point matériel, que pour simplifier nous supposons de masse égale à 1. Les

équations du mouvement où l'origine des axes est le centre de la force sont

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \pm ux, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \pm uy; \end{aligned} \right.$$

le double signe correspond au cas d'une force répulsive ou attractive; enfin u est une fonction inconnue qui peut dépendre en général de x et y et de x' et y', x' et y' étant les projections de la vitesse sur les axes Ox et Oy.

Considérons un second point matériel de même masse que le premier et dont les coordonnées par rapport à Ox et Oy sont x_1 et y_1, et qui se meut dans le temps t_1.

Effectuons la transformation suivante, en posant

$$(2) \qquad x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = \pm u.$$

Différentions les deux premières relations (2) par rapport à t_1; on aura, en désignant par x'_1, y'_1 les dérivées de x_1, y_1 par rapport à t_1, et x'', y'' les dérivées de x' et y' par rapport à t,

$$x'_1 = x'' \frac{dt}{dt_1}, \qquad y'_1 = y'' \frac{dt}{dt_1},$$

d'où, en ayant égard à (1) et (2), on a

$$(3) \qquad x'_1 = x, \qquad y'_1 = y.$$

Différentions une dernière fois ces dernières relations, on a

$$x''_1 = x' \frac{dt}{dt_1}, \qquad y''_1 = y' \frac{dt}{dt_1};$$

en ayant égard à (2), on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} x_1, \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} y_1. \end{cases}$$

Ces équations sont les équations du mouvement du point de coordonnées x_1, y_1, et où l'on doit remplacer dans la fonction u, d'après (2) et (3), x et y par x'_1, y'_1, et x' et y' par x_1 et y_1. Nous remarquons que, par cette transformation, le premier mouvement se transforme en un autre, où la force est encore centrale, le centre de la force étant le même point que dans le premier mouvement et ayant pour trajectoire la courbe hodographe correspondant au premier mouvement; le mouvement sur cette dernière courbe a lieu d'ailleurs dans le temps t_1. Remarquons que si l'on a égard au second théorème énoncé au n° 2 et si, au lieu d'effectuer les transformations (2) et (3), nous effectuons la transformation

$$(5)\qquad x_1 = y', \qquad y_1 = -x', \qquad \frac{dt_1}{dt} = \pm u,$$

on en déduit comme précédemment par différentiations

$$(6)\qquad x'_1 = y, \qquad y'_1 = -x,$$

et pour les équations du mouvement

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} x_1, \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} y_1, \end{cases}$$

où l'on doit effectuer sur la fonction u les transformations (5) et (6). Le mouvement défini par le système (1) se transforme ainsi en un autre, ayant pour trajectoire la polaire réciproque correspondant à cette trajectoire, par rapport au cercle qui figure dans l'énoncé du théorème du n° 2. Il résulte donc d'après ce qui précède que la trajectoire correspondant au système (1) coïncide avec la courbe hodographe, ou bien avec la polaire réciproque, si ce système se transforme en lui-même par les transformations (2) et (3), ou par les transformations (5) et (6), ce qui exige que la fonction u soit de la forme

$$u = \frac{f(x, y, x', y')}{f(x', y', x, y)} \tag{8}$$

dans le premier cas, ou encore de la forme

$$u = \frac{f(x^2, y^2, x'^2, y'^2)}{f(x'^2, y'^2, x^2, y^2)}, \tag{9}$$

où f est une fonction arbitraire, et de plus cette dernière expression est symétrique par rapport à x et y, ainsi que par rapport à x' et y'.

Il est facile de montrer que toute solution du système (1) est une solution du problème, si la fonction u est du type (8) ou (9), la fonction f étant donnée. En effet, soit

$$\Psi(x, y, x_0, y_0, x'_0, y'_0) = 0 \tag{10}$$

l'intégrale générale du système (1), où nous avons exprimé les constantes d'intégration en fonction des conditions initiales. Nous aurons l'équation de la courbe hodographe correspondant à cette dernière équation en lançant le mobile d'après (2) et (3) avec les conditions initiales suivantes : les coordonnées du point initial sont x'_0 et y'_0, et les composantes de la vitesse initiale, x_0 et y_0. Le système (1) se transformant en lui-même, l'équation de l'hodographe est donc

$$\Psi(x, y, x'_0, y'_0, x_0, y_0) = 0, \tag{11}$$

où nous avons supprimé les indices. Il y a deux cas à distinguer, ou bien cette dernière courbe coïncide avec la première, ce qui exige que l'équation (10) soit symétrique par rapport à x_0 et x'_0 ainsi que par rapport à y_0 et y'_0. Dans ce cas et pour la fonction particulière de f donnée, la trajectoire correspondant au système (1) est à elle-même sa courbe hodographe, quelles que soient les conditions initiales. Nous aurons donc, d'après le n° 2, l'équation de la polaire réciproque, en effectuant une rotation d'un angle droit de la courbe (10) ou (11) autour du centre du cercle directeur; cette équation est donc

$$\Psi(-y, x, x'_0, y'_0, x_0, y_0) = 0. \tag{12}$$

Si les équations (10) et (11) sont distinctes, il suffit d'écrire que ces deux courbes coïncident, d'où l'on déduit les conditions auxquelles doivent satisfaire les données initiales. Supposons la fonction u du type (9), on remarque dans ce cas que l'équation (12) est aussi une solution du système (1). Si nous lançons le mobile d'après les formules de transformation (5) et (6) avec les conditions initiales $x'_0, -y'_0, y_0, -x_0$, l'intégrale générale du système (1) est la polaire réciproque correspondant à l'équation (10); cette équation est donc

$$\Psi(x, y, x'_0, -y'_0, y_0, -x_0) = 0. \tag{13}$$

Il s'ensuit que les équations (12) et (13) ne sont pas distinctes, ce qu'on voit sans peine puisque la loi de la force est la même, et les conditions initiales qui font décrire ces courbes sont les mêmes. Sur les courbes (10) et (13) nous pouvons faire les mêmes hypothèses que sur les courbes (10) et (11). Les courbes (10) et (13) coïncident, et dans ce cas, pour la fonction f donnée, la trajectoire (10) est à elle-même sa polaire réciproque, quelles que soient les conditions initiales; dans le cas contraire, on écrira comme précédemment que les courbes (10) et (13) coïncident, d'où l'on déduira les conditions auxquelles les données doivent satisfaire. Il peut cependant se faire que, pour une fonction particulière de f, on ne puisse pas déterminer des conditions initiales particulières, permettant d'amener la courbe (10) à coïncider par une rotation comme nous l'avons expliqué, avec sa courbe hodographe ou avec sa polaire réciproque; cela tient à ce fait que ces dernières courbes sont égales à la première, mais non superposables. En effet, on remarque que si la fonction u est du type (9), la symétrique de la courbe hodographe ou de la polaire réciproque, par rapport à l'axe polaire Ox, est aussi une solution du système (1).

4. Nous avons montré que toute solution du système (1) est une solution du problème, si la fonction u est du type (8) ou (9). Il nous reste à montrer qu'on a ainsi toutes les solutions. Il suffit pour cela de démontrer le théorème suivant :

Si, quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire d'un point matériel est plane, et si elle est à elle-même (la courbe hodographe) sa polaire réciproque par rapport à un cercle, la force qui le sollicite passe par (l'origine de l'hodographe) le centre du cercle directeur.

En effet, prenons pour axe polaire la droite Ox, et pour pôle le centre du cercle directeur, et soient r et θ les coordonnées polaires d'un point M, α l'angle de la tangente à la trajectoire décrite par le point avec l'axe Ox, V l'angle de cette tangente avec le rayon vecteur OM, enfin r_1 et α_1 les coordonnées polaires du pôle correspondant à la tangente en M par rapport au cercle directeur. On a, comme il est bien connu,

$$(1) \qquad rr_1 \sin V = C;$$

$\sqrt{C}$ est le nombre qui mesure le rayon du cercle directeur. La relation (1) peut s'écrire, en ayant égard à la relation $\operatorname{tang} V = r\frac{d\theta}{dr}$,

$$(2) \qquad r_1^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

On sait que l'angle V se conserve par la transformation par polaire réciproque ; on aura donc par analogie

$$(3) \qquad r^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\alpha_1}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2}\right],$$

ou

$$(3') \qquad r^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2}\right].$$

Cette dernière relation correspond à la courbe obtenue par la rotation de la polaire réciproque d'un angle droit autour du point O. Différentions (2) et (3), nous aurons

$$(4) \qquad \frac{r_1\,dr_1}{dr} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right)$$

et

$$(5) \qquad \frac{r\,dr}{dr_1} = -\frac{C^2}{r_1^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r_1}}{d\alpha_1^2} + \frac{1}{r_1}\right);$$

il suffit de remplacer α_1 par α dans cette dernière formule pour avoir la différentielle de (3'). Remarquons que si nous égalons $\frac{r_1\, dr_1}{dr}$ à une fonction de r, θ, r_1, α_1 ou α, d'où l'on déduit $r\frac{dr}{dr_1}$ et qu'on porte dans (4) et (5) en ayant égard à (2) et (3), on aura l'équation différentielle de la trajectoire et de sa polaire réciproque; or, si les deux courbes coïncident, elles doivent satisfaire à une même équation différentielle; donc les deux équations différentielles (4) et (5) ne doivent différer que par le changement de r et θ en r_1 et α_1. Il s'ensuit par conséquent qu'on ne peut avoir que

$$r_1\frac{dr_1}{dr} = r\frac{f(r,\theta,r_1,\alpha_1)}{f(r_1,\alpha_1,r,\theta)},$$

où f est une fonction arbitraire. En portant cette dernière expression dans (4), on a

$$r\frac{f(r,\theta,r_1,\alpha_1)}{f(r_1,\alpha_1,r,\theta)} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right),$$

qui est la formule de Binet de l'équation différentielle de la trajectoire, dans le cas d'une force centrale qu passe par l'origine des axes, c'est-à-dire la centre du cercle directeur.

5. *Application.* — Examinons les cas particuliers où f est une constante, et supposons la force attractive; on a dans ce cas :

Exemple I.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y,$$

avec les formules de transformation

$$x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = -1.$$

L'intégrale générale est l'ellipse ayant pour équation

$$(b'x - by)^2 + (ay - a'x)^2 = (ab' - ba')^2,$$
$$ab' - ba' \neq 0,$$

où a, b, a', b' sont les constantes d'intégration; la constante des aires a pour valeur $C = ab' - ba'$. Il résulte, d'après ce qui précède, que pour avoir l'équation de la courbe hodographe, il faut exprimer les constantes en fonction des conditions initiales, et faire l'échange entre x_0 et x'_0 et y_0 et y'_0; or, par un calcul facile, on trouve que cela revient à changer dans l'équation précédente a en b et a' en b', et comme l'équation ne change pas, il résulte que l'ellipse précédente est à elle-même la courbe hodographe, quelles que soient les conditions initiales, l'origine de la courbe hodographe est le centre de cette ellipse; par conséquent, la polaire réciproque de cette ellipse s'obtiendra en la faisant tourner d'un angle droit autour de son centre. Le cercle directeur a pour centre le même point et pour rayon $\sqrt{ab' - ba'}$.

Exemple II. — Supposons la force répulsive; dans ce cas les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = y,$$

avec les formules de transformation

$$x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = 1.$$

L'intégrale générale est l'hyperbole ayant pour équation

$$(b'x - by)(ay - a'x) = (ab' - ba')^2$$

et pour asymptotes les droites

$$b'x - by = 0, \qquad ay - a'x = 0;$$

la constante des aires est

$$C = ab' - ba'.$$

Si nous déterminons les constantes en fonction des conditions initiales, on trouve par un calcul facile

$$a = \frac{x_0 + x'_0}{2}, \qquad a' = \frac{y_0 + y'_0}{2},$$
$$b = \frac{x_0 - x'_0}{2}, \qquad b' = \frac{y_0 - y'_0}{2}.$$

En remplaçant dans l'équation précédente les constantes par leurs valeurs, et en effectuant l'échange entre x_0 et x'_0 et y_0 et y'_0, on trouve pour l'équation de la courbe hodographe

$$\left[\left(\frac{y'_0 - y_0}{2}\right)x - \left(\frac{x'_0 - x_0}{2}\right)y\right]\left[\left(\frac{x_0 + x'_0}{2}\right)y - \left(\frac{y_0 + y'_0}{2}\right)x\right]$$
$$= \left[\frac{(x_0 + x'_0)(y'_0 - y_0) - (x'_0 - x_0)(y_0 + y'_0)}{4}\right]^2.$$

On remarque que cette courbe coïncide avec l'hyperbole conjuguée à la première. Si, comme nous l'avons expliqué, nous changeons dans cette dernière équation x en $-y$ et y en x, nous aurons l'équation de la polaire réciproque de la trajectoire. Ces deux courbes ne peuvent coïncider que si la trajectoire est une hyperbole équilatère, ce qui exige que les conditions initiales doivent satisfaire à la relation

$$v_0^2 = r_0^2,$$

v_0 étant la vitesse initiale et r_0 le rayon vecteur initial. Dans cet exemple, le centre de l'hyperbole est le centre du cercle directeur qui a pour diamètre l'axe transverse de l'hyperbole.

Exemple III. — Supposons la force attractive, et la fonction $u = \frac{x'.y'}{x.y}$.

Les équations du mouvement sont

$$x'' = -\frac{x'.y'}{y},$$
$$y'' = -\frac{x'.y'}{x},$$

d'où

$$\frac{dx'}{x'} = -\frac{dy}{y},$$
$$\frac{dy'}{y'} = -\frac{dx}{x}.$$

En intégrant ces équations on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{a}{y}, \\ y' &= \frac{b}{x}, \end{aligned} \right.$$

où a et b sont les constantes d'intégration. Les relations (1) nous donnent, en désignant par C la constante des aires,

$$yx' - xy' = a - b = \mathrm{C};$$

posons en particulier

$$a = m\mathrm{C}, \qquad b = (m-1)\mathrm{C},$$

où m est nombre entier quelconque et positif. Les relations (1), en les divisant membre à membre, nous donnent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(m-1)y}{mx}.$$

En intégrant cette équation, on a, après avoir déterminé la constante d'intégration,

$$y^m = \frac{y_0^m}{x_0^{m-1}} x^{m-1};$$

posons encore

$$\frac{y_0^m}{x_0^{m-1}} = (mp)^{m-1},$$

où p est une constante quelconque; on a, pour l'équation de la trajectoire, la courbe algébrique

$$y^m = (mp)^{m-1} x^{m-1}.$$

Cette courbe coïncide avec sa courbe hodographe, si les conditions initiales satisfont à la relation

$$\frac{y_0^m}{x_0^{m-1}} = \frac{y_0'^m}{x_0'^{m-1}}.$$

Nous aurons ensuite la polaire réciproque par une rotation d'un angle droit de cette dernière courbe autour du point O de rebroussement de la courbe. Le centre du cercle directeur est ce même point et le rayon a pour mesure

$$C = (-1)^{m-1} \frac{[m(m-1)p^2]^{m-1}}{m}.$$

Si en particulier nous supposons $m = 2$, on trouve pour trajectoire une parabole; le centre du cercle directeur est le sommet de la parabole; ce cercle est imaginaire et son rayon est $p\sqrt{-1}$, p étant le paramètre de la parabole. Dans le cas où $m = 3$, on trouve pour trajectoire une parabole semi-cubique.

Exemple IV. — Nous allons terminer par un dernier exemple. Supposons la force attractive et $u = \frac{v^2}{r^2}$, v étant la vitesse à l'instant considéré et r le rayon vecteur. La loi de la force dans ce cas est

$$F = -r\frac{v^2}{r^2};$$

or, d'après Résal (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 90), on a

$$F = -\frac{rv^3}{C\rho},$$

où C est la constante des aires et ρ le rayon de courbure au point correspondant de la trajectoire. On a donc

$$(1) \qquad \rho = \frac{v^2 r^2}{C} = \frac{r^2}{p},$$

en ayant égard au théorème des aires, écrit sous la forme

$$pv = C,$$

où p est la distance du centre de la force à la tangente à la trajectoire. La formule (1) peut encore s'écrire

$$r\frac{dr}{dp} = \frac{r^2}{p},$$

d'où enfin

$$p = ar,$$

a étant la constante d'intégration. Si nous désignons par V l'angle de la tangente à la trajectoire avec le rayon vecteur, la relation précédente nous donne

$$\sin V = a.$$

Il s'ensuit par conséquent que la trajectoire est une spirale logarithmique ayant pour pôle le centre de la force; son équation est

$$r = r_0 e^{\pm \cot V(\theta - \theta_0)}.$$

Supposons que le mouvement sur la trajectoire a lieu dans le sens de θ croissant; prenons pour sens positif sur la tangente, le sens du mouvement, et pour sens positif sur le rayon vecteur, le sens OM; l'angle V, qui figure dans l'équation précédente, est l'angle de ces deux directions positives. On remarque alors que l'angle de deux directions positives correspondant à la courbe hodographe est $\pi - V$, et par conséquent, d'après ce que nous avons dit au n° 3, l'équation de la courbe hodographe est

$$v = v_0 e^{\mp \cot V (\alpha - \alpha_0)}.$$

Il résulte donc que ces deux courbes sont égales, mais non superposables. Il suffit par conséquent de considérer la courbe symétrique de la précédente par rapport à l'axe Ox, pour l'amener ensuite par une rotation convenable à la faire coïncider avec la première courbe. Remarquons que le centre du cercle directeur est le pôle de la spirale.