Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 423-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__423_1>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère les surfaces* (S) *et* (S′) *qui, rapportées à trois axes rectangulaires, ont res-*

pectivement pour équation

$$(S) \qquad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tang}^2 \alpha,$$

$$(S') \qquad x^2 + y^2 - ax = 0,$$

α *et* a *étant des constantes.*

1° *Quelles sont ces surfaces? Figurer la projection de leur intersection sur le plan* $x O z$.

2° *Volume situé au-dessus du plan* $z = 0$, *au-dessous de la surface* (S) *et à l'intérieur de la surface* (S'). *L'axe* Oz *est supposé vertical.*

3° *Centre de gravité de ce volume supposé homogène.*

II. 1° *Intégrer l'équation differentielle*

$$(E) \qquad 2xy'y'' + 1 + y'^2 = 0.$$

2° *Construire la courbe intégrale* (C) *qui passe par* $x = 1$, $y = 1$ *et dont la tangente en ce point est parallèle à* Ox.

Montrer que la courbe (C) *peut être représentée par les équations*

$$x = \sin^2 t, \qquad y = t + \sin t \cos t,$$

où t *est un paramètre variable.*

3° *Comment peut-on déduire de la courbe* (C) *toutes les autres courbes intégrales de l'équation* (E)?

4° *Développée de la courbe* (C).

Épreuve pratique. — I. *Un point* M, *de masse égale à* 1, *mobile sur une droite, est attiré vers un point fixe* O *de la droite par une force* 2 OM. *Le point* M *est soumis en outre à une résistance dirigée en sens inverse de la vitesse et égale au double de la valeur absolue de cette vitesse. Les unités choisies sont celles du système* C. G. S.

1° *Trouver le mouvement de* M. *Étudier ce mouvement.*

2° *On suppose que, pour la position initiale* M_0 *du mobile, la vitesse initiale est nulle et* OM_0 *est égal à* 10. *Calculer la limite de la somme des chemins parcourus par le mobile lorsque le temps croît indéfiniment.*

II. 1° *Combien l'équation*

$$e^{x-1} - x - \frac{1}{e} = 0$$

a-t-elle de racines?

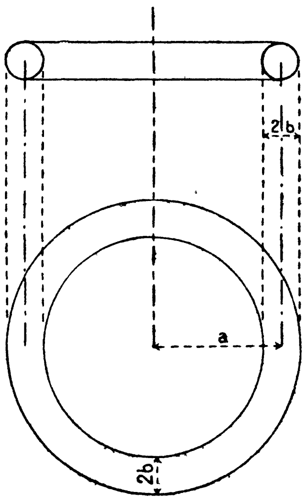
2° *Calculer ces racines à* $\frac{1}{100}$ *près.* (Juin 1910.)

Besançon.

Épreuve théorique. — *Question de cours.* — 1° *Vecteur tourbillon d'un champ vectoriel dérivable; théorème d'Ampère-Stokes; invariance du vecteur tourbillon; conditions* nécessaires et suffisantes *pour que l'expression* $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$ *soit une différentielle exacte, en supposant au préalable que les fonctions* X, Y, Z, *des variables* x, y, z *admettent des dérivées partielles.*

2° *Faisceau de rayons à deux paramètres; il n'existe pas en général de surface qui leur soit normale; condition pour qu'il en soit ainsi; si cette condition est satisfaite pour un faisceau, elle sera également satisfaite pour le faisceau provenant de la réflexion ou de la réfraction sur une surface quelconque.*

Problème. — x, y, z *désignant les coordonnées carté-*



siennes rectangles d'un point M, *trouver la surface intégrale la plus générale qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles*

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} + 3xy = 0.$$

Particulariser la solution de manière que la surface intégrale contienne le cercle

$$z = 0$$
$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Définition géométrique de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Déterminer un polynome du quatrième degré par les cinq valeurs* 0, -1, 0, $+1$, 0 *que doit prendre ce polynome en correspondance avec les valeurs respectives de la variable* x :

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2.$$

2° *Calculer le moment d'inertie d'un tore homogène par rapport à son axe de révolution.*

Densité cubique de la matière du tore $= 1$.

Rayon du cercle décrit par le centre du cercle générateur $= a$.

Rayon du cercle générateur $= b$.

(Juillet 1911.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient* Ox, Oy *deux axes rectangulaires. On demande de déterminer dans le plan* xOy *une courbe* C *telle que si l'on mène en un point quelconque* M *de cette courbe la tangente* MT *et la normale* MN, *on ait, entre les abscisses* X_t, X_n *des deux points où ces droites rencontrent l'axe* Ox, *la relation*

$$X_t - X_n = 2a,$$

a *étant une constante positive donnée.*

En désignant par θ *l'angle aigu positif ou négatif que fait la normale* MN *avec* Ox, *exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de* θ. *Toutes les courbes jouissant de la propriété en question se déduisent de l'une d'entre elles par une simple translation parallèle à* Ox. *Construire celle qui, pour* $\theta = \frac{\pi}{4}$, *donne une abscisse nulle* ($x = 0$) *pour le point* M *correspondant. Calculer la longueur de l'arc compris entre les deux points qui correspondent à* $\theta = 0$ *et à* $\theta = \frac{\pi}{4}$. *Déterminer le rayon de courbure pour chaque valeur de* θ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne les deux ellipses qui, en coordonnées rectangulaires, ont pour équations*

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{12} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} - 1 = 0.$$

On demande de calculer à 0,001 *près l'aire commune à ces deux ellipses.*

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Exposer la méthode d'intégration d'une fraction rationnelle en supposant connues les racines du dénominateur.*

II. *Déterminer l'ordonnée y d'un point d'une courbe en fonction de l'abscisse x, de telle manière que, en tout point de cette courbe, le rayon de courbure* R *soit égal au carré de la dérivée seconde de y par rapport à x, c'est-à-dire*

$$R = y''^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le cercle* C *dont le diamètre* OA *est égal à l'unité.*

Par le point O *on fait passer une sécante variable* OP *sur laquelle on porte, à partir de* O, *une longueur* OM *telle que*

$$OM = \sqrt{OP}.$$

Le lieu du point M *est une courbe γ qui, en tournant autour de* OA, *engendre une surface de révolution* S. *On demande d'évaluer :*

1° *Le volume du solide limité par la surface* S;

2° *L'aire de la surface* S.

(Novembre 1910).

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les axes de coordonnées* Ox, Oy, *étant supposés rectangulaires, on considère la chaînette ayant pour équation*

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Soient P *un point de cette courbe*, H *sa projection sur* OX, (C) *le cercle de centre* P *et de rayon* PH.

L'enveloppe de ce cercle (C) *se compose :* 1° *de l'axe* OX, *qu'il touche au point* H; 2° *d'une certaine courbe* (S), *qu'on demande de déterminer, et qu'il touche en un point* M.

Construire cette courbe (S).

Vérifier que la distance des deux points H *et* M *est constante.*

Montrer que la longueur de l'arc décrit par le point M *sur la courbe* (S) *est égale à la longueur du segment rectiligne décrit pendant le même temps par le point* H *sur l'axe* OX.

Épreuve pratique. — *Les axes de coordonnées* OX, OY *étant supposés rectangulaires, un point mobile* (x, y) *décrit la parabole donnée*

$$y^2 = 2px.$$

Si, à partir de l'origine O, *on mène un vecteur équipollent au vecteur vitesse, l'extrémité* (a, b) *de ce vecteur équipollent décrit la parabole également donnée* (*hodographe*)

$$a^2 = 2qb.$$

Cela posé, on demande :

1° *De calculer* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ *en fonction de* y;

2° *De montrer que la vitesse aréolaire par rapport à l'origine est constante;*

3° *De calculer* x *et* y *en fonction de* t.

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — *Les axes de coordonnées* OX, OY *étant supposés rectangulaires :*

1° *Construire la courbe ayant pour équation*

$$y = \frac{x}{1 + x^2}.$$

2° *On considère seulement la portion de la courbe précédente qui correspond aux valeurs positives de* x. *Soient, sur cette portion de courbe :*

A *le point d'ordonnée maximum ;*

M_1 *le point d'abscisse* x_1 ;

M_2 *le point d'abscisse* x_2, *qu'on supposera situé à droite du point* A.

Déterminer la relation qui doit exister entre x_1 *et* x_2 *pour que l'aire comprise entre l'arc* OM_1, *l'axe des* x *et les ordonnées des points* O *et* M_1, *soit égale à l'aire analogue comprise entre l'arc* AM_2, *l'axe des* x, *et les ordonnées des points* A *et* M_2.

3° *Étudier comment varie la distance mutuelle des projections des points* M_1 *et* M_2 *sur* OX, *lorsque ces deux points varient en satisfaisant à la condition ci-dessus spécifiée. Montrer que cette distance possède un minimum.*

4° *En désignant par* M'_1 *et* M'_2 *les positions des points* M_1 *et* M_2 *qui correspondent à ce minimum, calculer le volume engendré par la rotation autour de* OX *de l'arc* $M'_1M'_2$ *complété par les ordonnées des points extrêmes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y' + y = 2e^x$$

(*e désigne la base des logarithmes népériens*).

2° *Indiquer les diverses formes que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation précédente ;*

3° *Quel est le lieu des points d'inflexion de ces courbes, et le lieu des points où la tangente est parallèle à l'axe des* x ?

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Calculer la constante* λ *de manière que l'expression*

$$\frac{x^2}{x + \lambda y}\,dx + \frac{3y^2}{y + \lambda x}\,dy$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$, *et déterminer cette fonction.*

En désignant par OX, OY *deux axes rectangulaires, construire les courbes*

$$U(x, y) = \text{const.},$$

ainsi que leurs trajectoires orthogonales.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ :

1° *Déterminer toutes les courbes intégrales du système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dz} = -x + y - 2\alpha^2 z,$$

$$\frac{dy}{dz} = 2x - 2z^2 + 2(\alpha + 1)z + 2\alpha^2 - \alpha + 2,$$

où α *désigne une constante.*

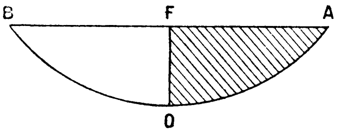
2° *Déterminer celle de ces courbes qui passe par le point*

$$x = 0, \qquad y = -\alpha, \qquad z = 0;$$

montrer que cette courbe est une parabole, et former l'équation de son plan P.

3° *Trouver l'enveloppe des plans* P *lorsque* α *varie.*

Épreuve pratique. — *Étant donnée une parabole dont le sommet* O *et le foyer* F *sont distants de* 1^{m}, *on considère la*



corde AFB, *perpendiculaire en* F *sur* OF, *et l'on demande de calculer :*

1° *En décimètres carrés l'aire de la portion de paraboloïde engendrée par la rotation de l'arc* OA *autour de* OF ;

2° *En décimètres cubes le volume du solide engendré par la rotation de l'aire* FAOF *autour de* OF ;

3° *En décimètres la longueur de l'arc* AOB *de la parabole.*

(Juin 1911.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — I. *Construire la courbe*

$$(x - y)^2 = x + y.$$

Calculer son rayon de courbure à l'origine.

II. *Intégrer l'équation*

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = \sin x;$$

déterminer la courbe intégrale de façon qu'elle ait un point d'inflexion à l'origine, la tangente d'inflexion étant l'axe des x.

III. *On considère dans l'espace une courbe* C, *la tangente* T *et le plan normal* P *en un point. La tangente coupe le plan des xy en un point* A *et le plan normal coupe le même plan suivant une droite* D; *déterminer la courbe* C *de façon que le pied de la perpendiculaire abaissée de* A *sur* D *soit un point fixe qu'on pourra supposer placé à l'origine des coordonnées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On considère la fonction*

$$y = \int_0^x \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe. Points d'inflexion.

Mener par l'origine des coordonnées les tangentes à la courbe. Calculer à 0,01 *près l'abscisse de celui des points de contact qui a la plus petite abscisse positive.*

Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^3 \, dx}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)}.$$

(Novembre 1910.)