Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 422-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__422_1>

CORRESPONDANCE.

M. L. Klug. — Dans la solution analytique de la question 2155 (t. XI, p. 330), *M. Barisien* a donné une généralisation. On peut de même démontrer assez simplement ce théorème plus général :

Si c, c_1 sont deux coniques confocales avec des axes focaux

$2a$, $2a_1$ et la distance focale $2d$: 1° les coniques bitangentes à c (ou à c_1) et ayant leurs foyers aux extrémités des diamètres de la conique c_1 (ou c) enveloppent un cercle concentrique à la conique c et de rayon $(a^2+a_1^2-d^2)^{\frac{1}{2}}$; 2° les coniques bitangentes à c (ou à c_1) et ayant leurs foyers aux extrémités des cordes parallèles aux axes focaux de c_1 (ou c) enveloppent deux droites perpendiculaires à cet axe à une distance $\frac{aa_1}{d}$ du centre de c.

Soient O le centre, F, F_1 les foyers, AA_1 un diamètre, AP une tangente à la conique c et BP une tangente à c_1 perpendiculaire à AP. Si B est le point de contact de la tangente, les parallèles par B aux droites AF, AF_1 et les rayons BF, BF_1, BA, BA_1 forment une involution symétrique; et les angles de ces derniers rayons avec BP sont égaux. A et A_1 sont donc les foyers d'une conique u, bitangente à c_1 aux extrémités du diamètre BB_1. De même, B et B_1 sont les foyers d'une conique u_1, bitangente à c aux extrémités du diamètre AA_1.

Les axes focaux de u et u_1 sont égaux à 2OP. Mais, si l'on fait varier les deux tangentes perpendiculaires AP, BP aux coniques c, c_1, le point P décrit un cercle du centre O et de rayon $(a^2+a_1^2-d^2)^{\frac{1}{2}}$ (où $2d = FF_1$ et $2a$, $2a_1$ sont les axes focaux de c, c_1); donc, la première partie du théorème est démontrée.

Si le cercle passant par FF_1 coupe c en C et C_1, c_1 en D et D_1, on peut démontrer, comme dans la première solution de la question 2155, que les axes focaux de la conique v ayant C et C_1 pour foyers et bitangente à c_1 aux points D et D_1, et de la conique v_1 ayant D et D_1 pour foyers et bitangente à c aux points C et C_1 sont égaux à $\frac{2aa_1}{d}$, donc, etc...