NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M.-F. EGAN

Note sur les quadriques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 420-422

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__420_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[L²10a]

NOTE SUR LES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. M.-F. EGAN.

I. Soit une quadrique S faisant partie d'un système homofocal Σ, et soit l une ligne géodésique ou une ligne de courbure sur S. Alors :

Le produit des distances d'un point M *qui se meut sur* l, *aux deux génératrices du système qui sont parallèles à la tangente en* M *à* l, *est constant.*

En effet, soit

$$(1) \qquad pu^2 + qv^2 + rw^2 - t^2 = \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

l'équation du système Σ en coordonnées tangentielles u, v, w, t. Si l'on déplace le trièdre des axes d'une façon quelconque, cette équation devient

$$(2) \qquad f(u, v, w, t) = \lambda(u^2 + v^2 + w^2),$$

le coefficient de t^2 étant -1. Soit δ une droite parallèle au nouvel axe des z, et projetons le système sur le plan des xy par des plans tangents parallèles à δ. Cela revient à écrire $w = 0$. On a donc

$$f(u, v, 0, t) = \lambda(u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire un système de coniques homofocales à paramètre λ. Le coefficient de t^2 étant -1, la différence des carrés des demi-axes majeurs des coniques λ_1, λ_2 sera donc $\lambda_1 - \lambda_2$.

Il est facile de voir, et il est d'ailleurs bien connu que les foyers du système de coniques seront les points où le plan des xy est percé par les deux génératrices du système Σ parallèles à δ. Soient r_1, r_2 les distances focales du point δ_0 où la droite δ perce le plan ; et soient λ_1, λ_2 les paramètres des coniques qui passent par δ_0, c'est-à-dire des quadriques auxquelles δ est tangente. Les axes des deux coniques étant $2a_1$ et $2a_2$, on a

$$r_1 + r_2 = 2a_1, \qquad r_1 - r_2 = 2a_2;$$

donc

$$r_1 r_2 = a_1^2 - a_2^2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Or, les perpendiculaires abaissées, d'un point quelconque de δ, sur les génératrices du système qui lui sont parallèles, sont égales à r_1 et r_2. Leur produit est donc constant à condition que $\lambda_1 - \lambda_2$ le soit : ce qui démontre la proposition.

II. Si le système Σ est composé de quadriques obtenues par la révolution d'une conique autour de l'axe des foyers réels, on a le cas particulier suivant :

Le produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une droite δ, *qui varie en touchant deux quadriques* λ_1 *et* λ_2 *du système, est égal à* $\lambda_1 - \lambda_2$.

Cela se déduit sans peine du théorème précédent, mais il est peut-être plus simple de donner une démonstration directe.

Pour que λ_1, λ_2 et δ soient réelles, il faut que l'une des quadriques soit un ellipsoïde et l'autre un hyperboloïde. Soient P et Q les points de contact avec l'ellipsoïde (λ_1) et l'hyperboloïde (λ_2), et soient S et H les foyers. Alors les angles SPQ, HPQ sont supplémentaires et les angles SQP, HQP sont égaux. Si donc on fait tourner le triangle PQH autour de PQ, jusqu'à ce que H vienne prendre une position H' dans le plan SPQ, les points S, P, H' seront en ligne droite, et QP sera la bissectrice de l'angle SQH'. Si p_1, p_2 sont les distances de S et H à PQ, il vient

$$\begin{aligned} 4p_1p_2 &= \mathrm{SH'}^2 - (\mathrm{SQ} - \mathrm{QH'})^2 \\ &= 4a_1^2 - 4a_2^2 \\ &= 4(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.