Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1911)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 358-376
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__358_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1911).

SUJETS DES COMPOSITIONS.

Mathématiques élémentaires.

I. *Si l'on mène à une ellipse* (C) *de centre* C *deux cercles bitangents, l'un* (A) *ayant son centre* A *sur l'axe focal, l'autre* (B) *ayant son centre* B *sur l'axe non focal, le point d'intersection* I *des cordes de contact* MM′ *et* NN′ *est un point limite pour le système des deux cercles.* (*On demande aux candidats une démonstration indépendante de la théorie des pôles et polaires dans les coniques; s'ils emploient l'équation de la droite* AB, *rapportée aux axes de l'ellipse, pour montrer d'abord que le point* I *est sur cette droite, ils établiront géométriquement les formules qui expriment* $\overline{CA}$ *et* $\overline{CB}$ *au moyen des coordonnées* $\overline{CP}$ *et* $\overline{CQ}$ *du point* I. *Ils pourront donner* subsidiairement *une démonstration fondée sur la théorie des pôles et polaires dans les coniques.*)

II. *On donne deux cercles* (A) *et* (B), *de centres* A *et* B, *dont l'un* (A) *est intérieur à l'autre; soit* I *celui des deux points limites du faisceau* (A, B) *qui est intérieur aux* *deux cercles. (Ce choix du point* I *a pour but d'écarter une discussion que les candidats n'auraient pas le temps de faire convenablement.)*

Si l'on mène par I *deux cordes rectangulaires* MM' *et* NN' *appartenant respectivement aux deux cercles, il existe une ellipse* (C) *doublement tangente aux deux cercles, les cordes de contact étant* MM' *et* NN'; *le démontrer. Les cordes variant, les pôles* R *et* S *de ces cordes sont sur une droite fixe* Δ *perpendiculaire à la droite* AB *en un point* J; *les circonférences qui ont pour diamètres les segments* RS *sont orthogonales à la circonférence de diamètre* AB *qui est le lieu des centres des ellipses* (C); *les carrés* a^2 *et* b^2 *des demi-axes des ellipses* (C) *sont, les uns et les autres, proportionnels aux distances* CD *des centres* C *à la droite* Δ : *les ellipses* (C) *sont, par suite, semblables entre elles.*

III. *Les données restant les mêmes, les tangentes en* M *et* M' *sont rencontrées par les tangentes en* N *et* N' *aux points* E, F, G, H. *Désignant par* λ *l'angle que fait* IM *avec le prolongement de* BA, *on établira les* six *relations qui déterminent en fonction des constantes de la figure* (r, R, $\frac{\text{IA}}{r} = \text{A}$, $\frac{\text{IB}}{\text{R}} = \text{B}$) *et du paramètre* λ *les éléments essentiels du quadrilatère* IMEN, *à savoir les angles* IME $= \alpha$, INE $= \beta$, *les côtés* IM *et* IN, *les côtés* EM *et* EN; *les deux dernières de ces relations sont*

$$\text{EM} \sin\alpha + \text{EN} \cos\beta = \frac{\text{R} \sin(\beta - \lambda)}{\cos\lambda},$$

$$\text{EM} \cos\alpha + \text{EN} \sin\beta = \frac{-r\cos(\lambda + \alpha)}{\sin\lambda}.$$

Vérifier au moyen de ces relations l'égalité $\frac{\text{EM}}{\text{EN}} = \frac{\text{B}}{\text{A}}$, *et en déduire que le quadrilatère* EFGH *reste inscrit à un cercle fixe* (O) *du faisceau* (A, B) *lorsque les cordes* MM' *et* NN' *varient. On déterminera la position du centre* O *de ce cercle en fonction des longueurs* IA, IB, JA, JB, JI, *en calculant successivement* $\frac{\text{OA}}{\text{OB}}$, OA, OB; *on calculera aussi la distance* JO, *on interprétera géométriquement la formule obtenue, et l'on en déduira une conséquence pour les circonférences décrites sur les segments* RS *comme diamètres.*

Comparant deux expressions différentes de la valeur du rapport $\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MH}}$ *en fonction des quantités* IE, IH, $\widehat{\mathrm{MIE}} = \gamma$, $\widehat{\mathrm{MIH}} = \delta$, *on obtiendra* $\gamma = \delta$, *et l'on interprétera ce résultat en considérant les diagonales* EG *et* FH. *De quelle nature est la correspondance entre les droites* EG *et* FH?

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I. *a. Par le calcul.* — En considérant l'ellipse comme projection du cercle, sans invoquer de propriété focale, on a (*fig.* 1)

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}.\overline{\mathrm{PR}}, \qquad \overline{\mathrm{P}m}^2 = \overline{\mathrm{CP}}.\overline{\mathrm{PR}},$$

d'où

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{CP}}}$$

et, par suite,

$$(\alpha) \qquad \frac{\overline{\mathrm{CP}}}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{b^2} = \frac{\overline{\mathrm{CA}}}{c^2}\left(= \frac{1}{\overline{\mathrm{CR}}}\right),$$

puisque $\overline{\mathrm{CP}}.\overline{\mathrm{CR}} = a^2$; en projetant l'ellipse suivant un cercle, on a de même, si l'on considère le point N,

$$(\beta) \qquad \frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{b^2} = \frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{CB}}}{-c^2}\left(= \frac{1}{\overline{\mathrm{CS}}}\right);$$

les relations (α) et (β) sont d'ailleurs équivalentes, car les unes ou les autres, appliquées au point M, donnent sur la normale en M

$$(\gamma) \qquad \frac{\overline{\mathrm{B'M}}}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{AM}}}{b^2} = \frac{\overline{\mathrm{B'A}}}{c^2}.$$

On peut dire encore, en considérant l'ellipse comme projection du cercle et en invoquant en même temps la propriété focale de la tangente,

$$\overline{\mathrm{CA}}.\overline{\mathrm{CR}} = c^2, \qquad \overline{\mathrm{CP}}.\overline{\mathrm{CR}} = a^2,$$

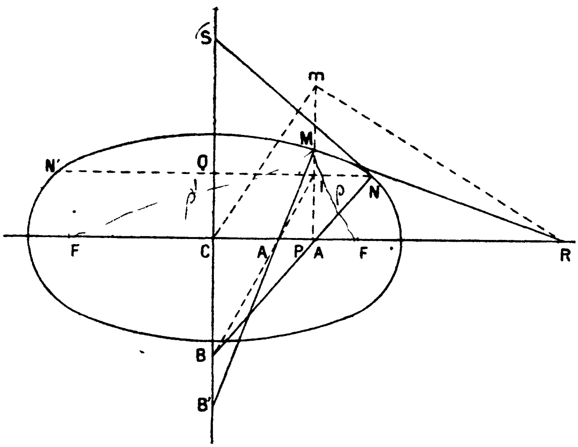
ce qui donne les relations (α), en introduisant dès le début le segment $\overline{\mathrm{CR}}$ utilisé à la fin de la seconde partie; on a ensuite le cercle FNF′ passant en B et par suite en S,

$$\overline{\mathrm{CB}}.\overline{\mathrm{CS}} = -c^2, \qquad \overline{\mathrm{CQ}}.\overline{\mathrm{CS}} = b^2,$$

ce qui donne les relations (β).

Sans considérer l'ellipse comme projection du cercle, on

Fig. 1.



peut dire aussi : on a d'abord, en appelant ρ et ρ′ les rayons vecteurs du point M,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\rho} = \frac{\mathrm{AF}'}{\rho'} = \frac{c}{a} = \frac{2\overline{\mathrm{CA}}}{\rho'-\rho} = \frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\frac{c}{a}\overline{\mathrm{CP}}},$$

d'où

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CP}}};$$

on écrit alors les relations (α), en tenant compte de la propriété focale $\overline{\mathrm{CA}}.\overline{\mathrm{CR}} = c^2$; on en déduit les relations (γ); celles-ci donnent les relations (β) pour la normale en M, et on les applique au point N en tenant compte de la propriété focale $\overline{\mathrm{CB}}.\overline{\mathrm{CS}} = -c^2$.

Ou bien, le cercle NFF′ ayant BS comme diamètre, la similitude des triangles BA′F et BFN donne

$$\frac{BA'}{BF} = \frac{BF}{BN} = \frac{A'F}{FN} = \frac{c}{a},$$

d'où

$$\frac{BA'}{BN} = \frac{c^2}{a^2},$$

$$(\gamma') \qquad \frac{\overline{BA'}}{c^2} = \frac{\overline{BN}}{a^2} = \frac{A'N}{b^2},$$

sur la normale en N. On en déduit (α) et (β), en introduisant les points R et S.

Si l'on considère maintenant sur AB le point I défini par les relations

$$\frac{\overline{IB}}{a^2} = \frac{\overline{IA}}{b^2} = \frac{\overline{AB}}{c^2},$$

on voit que les cordes MM′ et NN′ passent par ce point.

On pourrait dire encore : la corde NN′ étant fixe, le point M variant, CA et CP sont proportionnels, donc CA et QI sont proportionnels, donc la droite IA rencontre l'axe non focal en un point fixe, et ce point fixe est le point B, comme on le voit en mettant le point M en N. L'idée est, en somme, que la forme de la division M, A, B′ ne dépend que de l'ellipse, comme le montrent les relations (γ).

La méthode à laquelle l'énoncé fait allusion consiste à vérifier la relation

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = 1,$$

ce qui est immédiat.

Montrons que I est un point limite. Des relations

$$\overline{CA}\,.\,\overline{CR} = c^2, \qquad \overline{CB}\,.\,\overline{CS} = -c^2,$$

on déduit

$$\overline{CB}\,.\,\overline{CS} = -\,\overline{CA}\,.\,\overline{CR};$$

le quadrangle (A, R, B, S) est donc orthogonal, la droite RS est perpendiculaire sur AB, et cette droite est alors la polaire du point I par rapport à chacun des cercles (A) et (B).

[On aurait pu établir la relation $\overline{CB}.\ \overline{CS} = -c^2$ pour le point M, soit $\overline{CB'}.\ \overline{CS'} = -c^2$, en observant que le quadrangle

(A, R, B', S') est orthogonal, et en écrivant

$$\overline{CB'}.\overline{CS'} = -\overline{CA}.\overline{CR} = -c^2;$$

on se rend mieux compte ainsi de la relation

$$\overline{CB}.\overline{CS} = -\overline{CA}.\overline{CR},$$

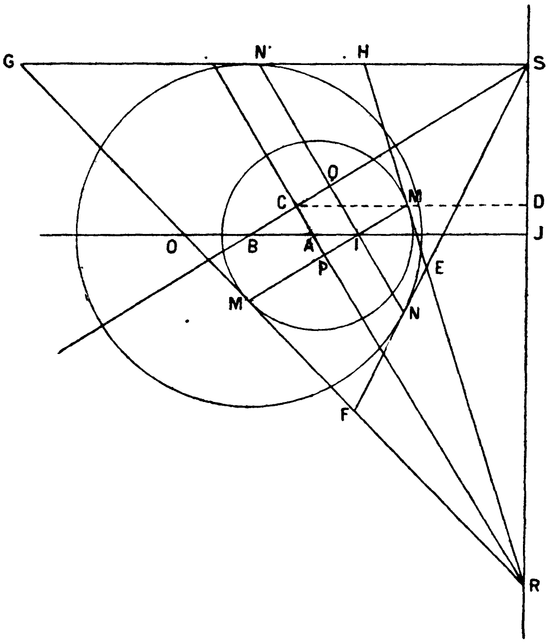
dont on fait usage ici.]

I. *b. Solution géométrique.* — Considérons la polaire du point I par rapport à l'ellipse. Elle passe par le point R, et aussi par le point R_1 qui est le conjugué du point I par rapport à M et M' : elle est donc la polaire de I pour le cercle (A); elle est de même la polaire de I pour le cercle (B); le point I a donc même polaire RS par rapport aux deux cercles, c'est un point limite. [On sait d'ailleurs que, si une conique (C) est doublement tangente à deux coniques (A) et (B), les cordes de contact passent par l'un des sommets du triangle autopolaire commun relatif à ces deux coniques, leurs pôles étant sur le côté opposé ; c'est cela qu'on démontre ici.]

Remarque. — Le point I est intérieur au rectangle circonscrit à l'ellipse parallèlement aux axes; il peut être intérieur ou extérieur à l'ellipse, intérieur ou extérieur aux deux cercles.

II. Les cercles (A) et (B) étant donnés, ainsi que le point limite I et les cordes rectangulaires MM', NN', menons par A et B des perpendiculaires à ces cordes qui se coupent en un point C; il existe une ellipse de centre C qui a ses axes dirigés suivant CR et CS, qui passe en M (par suite en M'), et qui est tangente en M (par suite en M') au cercle (A) : en effet, nous pouvons tracer un cercle de centre C tel que les points de contact des tangentes menées de R à ce cercle soient sur MM', et l'ellipse qui admet ce cercle comme cercle principal et qui passe en M répond aux conditions énoncées. Je dis que cette ellipse est tangente en N et en N' au cercle (B). Il existe, en effet, un cercle de centre (B) doublement tangent à l'ellipse; la corde de contact passe au point I, elle est portée par NN'; l'un des points limites du cercle considéré et du cercle (A) étant le point I, ce cercle est le cercle (B). (On aurait pu considérer l'ellipse de centre C, tangente en N

Fig. 2.



et N' au cercle (B) ; les foyers de cette ellipse sont donnés par le cercle de diamètre BS.]

Les points R et S sont sur la droite Δ qui est la polaire commune du point I par rapport aux cercles (A) et (B).

Le quadrangle (A, B, R, S) étant orthogonal, la circonférence de diamètre RS est orthogonale à celle de diamètre AB. Voici une démonstration simple de ce fait : l'ensemble formé par la première circonférence et le triangle inscrit SCR, et l'ensemble formé par la seconde circonférence et le triangle inscrit ACB peuvent être rendus homothétiques par rapport au point C au moyen d'une rotation d'un angle droit autour de C ; les tangentes en C sont donc orthogonales. Les circonférences qui ont pour diamètres les segments RS, ayant leurs centres en ligne droite et étant orthogonales à un cercle fixe, forment un faisceau ; elles coupent la droite AB en deux points fixes L et L′ définis par la relation $\overline{JL}^2 = JA.JB$.

Nous reviendrons sur ces circonférences.

On a trouvé, dans la première partie,

$$\frac{\overline{IB}}{a^2} = \frac{\overline{IA}}{b^2} = \frac{\overline{AB}}{c^2};$$

les ellipses (C) sont donc semblables ; l'idée est que la forme de la division I, A, B détermine la forme de la division M, A, B′, et, par suite, les rapports des quantités a^2, b^2, c^2. Comme on avait d'ailleurs

$$\frac{\overline{CP}}{a^2} = \frac{\overline{AP}}{b^2} = \frac{\overline{CA}}{c^2} = \frac{1}{\overline{CR}},$$

on a

$$\frac{\overline{BI}}{a^2} = \frac{\overline{AI}}{b^2} = \frac{\overline{BA}}{c^2} = \frac{1}{\overline{CD}},$$

puisque les segments de la division C, A, P sont aux segments de la division B, A, I comme $\overline{CD}$ est à $\overline{CR}$; a^2, b^2, c^2 sont donc proportionnels à $\overline{CD}$ lorsque MM′ et NN′ varient. On pourrait introduire dans cette démonstration les points U et V où la droite CD rencontre MM′ et NN′ ; on a par antiparallèles

$$a^2 = \overline{CP}.\overline{CR} = \overline{CU}.\overline{CD} = \overline{BI}.\overline{CD},$$
$$b^2 = \overline{CQ}.\overline{CS} = \overline{CV}.\overline{CD} = \overline{AI}.\overline{CD}.$$

Signalons encore les relations

$$c^2 = \overline{CA}.\overline{CR} = -\overline{CB}.\overline{CS} = \overline{BA}.\overline{CD}.$$

III. *a*. Considérons le contour quadrangulaire IMEN. Les triangles AIM et BIN donnant

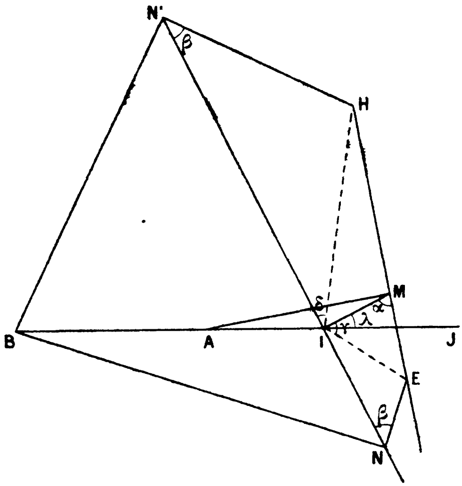
$$\frac{\sin(90-\alpha)}{AI} = \frac{\sin\lambda}{r} = \frac{\sin[\lambda-(90-\alpha)]}{IM},$$
$$\frac{\sin(90-\beta)}{BI} = \frac{\sin(90-\lambda)}{R} = \frac{\sin[90-\lambda-(90-\beta)]}{IN};$$

on a donc

$$(1) \qquad \cos\alpha = \mathrm{A}\sin\lambda \qquad \left(\mathrm{A} = \frac{\mathrm{AI}}{r}\right),$$

$$(2) \qquad \cos\beta = \mathrm{B}\cos\lambda \qquad \left(\mathrm{B} = \frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{R}}\right)$$

Fig. 3.



et

$$\mathrm{IM} = \frac{-r\cos(\alpha+\lambda)}{\sin\lambda},$$

$$\mathrm{IN} = \frac{\mathrm{R}\sin(\beta-\lambda)}{\cos\lambda},$$

ou encore, d'après (1) et (2),

$$(3) \qquad \mathrm{IM} = r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda),$$

$$(4) \qquad \mathrm{IN} = \mathrm{R}(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda);$$

on a d'ailleurs directement ces dernières formules en écrivant

$$\mathrm{IM} = \mathrm{PM} - \mathrm{PI} = r\sin\alpha - \mathrm{AI}\cos\lambda = r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda), \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire en appliquant aux triangles AIM et BIN une des relations classiques obtenues par projection.

Par projection sur IM et sur IN on a enfin

$$\mathrm{EN}\sin\beta + \mathrm{EM}\cos\alpha = \mathrm{IM},$$
$$\mathrm{EM}\sin\alpha + \mathrm{EN}\cos\beta = \mathrm{IN},$$

ou, d'après (1), (2), (3) et (4),

(5) $$\mathrm{EN}\sin\beta + \mathrm{A}.\mathrm{EM}\sin\lambda = r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda),$$

(6) $$\mathrm{EM}\sin\alpha + \mathrm{B}.\mathrm{EN}\cos\lambda = \mathrm{R}(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda).$$

Si l'on divise membre à membre, on voit que, pour établir la relation $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, il faut vérifier qu'on a

$$\frac{\mathrm{A}(\sin\beta + \mathrm{B}\sin\lambda)}{\mathrm{B}(\sin\alpha + \mathrm{A}\cos\lambda)} = \frac{r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda)}{\mathrm{R}(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda)},$$

ou

$$\frac{\mathrm{A}.\mathrm{R}}{\mathrm{B}.r} = \frac{\sin^2\alpha - \mathrm{A}^2\cos^2\lambda}{\sin^2\beta - \mathrm{B}^2\sin^2\lambda};$$

en tenant compte à nouveau de (1) et (2), cette relation devient

$$\frac{\mathrm{A}.\mathrm{R}}{\mathrm{B}.r} = \frac{1 - \mathrm{A}^2}{1 - \mathrm{B}^2},$$

ou

$$\mathrm{A}.\mathrm{R}(1 - \mathrm{B}^2) = \mathrm{B}.r(1 - \mathrm{A}^2),$$

ou, en divisant par AB,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} - \mathrm{B}.\mathrm{R} = \frac{r}{\mathrm{A}} - \mathrm{A}.r.$$

Or, *a priori*, les quatre quantités R, r, A, B, relatives à un système de deux cercles, sont liées par une relation qui exprime que I est point limite ; on doit avoir, J étant le conjugué de I par rapport aux deux cercles,

$$\overline{\mathrm{BJ}} - \overline{\mathrm{BI}} = \overline{\mathrm{AJ}} - \overline{\mathrm{AI}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{R}^2}{\overline{\mathrm{BI}}} - \overline{\mathrm{BI}} = \frac{r^2}{\overline{\mathrm{AI}}} - \overline{\mathrm{AI}},$$

ou

(6) $$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} - \mathrm{B}.\mathrm{R} = \frac{r}{\mathrm{A}} - \mathrm{A}r;$$

c'est bien ce qu'il fallait établir.

[En considérant l'ellipse comme projection d'un cercle, on a

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\mathrm{IM.IM'}}{im.im'} = \frac{\mathrm{IM.IM'}}{\mathrm{IN.IN'}} = \frac{r^2 - \overline{\mathrm{IA}}^2}{\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{IB}}^2};$$

comme on a trouvé $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IB}}}$, on doit avoir

$$\frac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IB}}} = \frac{r^2 - \overline{\mathrm{IA}}^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{IB}^2},$$

ou

$$\frac{\mathrm{A} : \mathrm{R}}{\mathrm{B} : r} = \frac{1 - \mathrm{A}^2}{1 - \mathrm{B}^2};$$

c'est la relation (δ) sous la forme qu'on a d'abord rencontrée ci-dessus.]

Si l'on veut arriver à la relation $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, et non pas se contenter de la vérifier, le mieux est de calculer directement EM et EN sur la figure, en projetant le contour IMEN sur une perpendiculaire à EN et sur une perpendiculaire à EM; on a d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{EM}\sin\mathrm{E} &= \mathrm{IN}\sin\beta - \mathrm{IM}\cos\beta\\ &= \mathrm{R}\sin\beta(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda) - \mathrm{B}.r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda)\cos\lambda\\ &= -\mathrm{B}(\mathrm{R}\sin\beta\sin\lambda + r\sin\alpha\cos\lambda)\\ &\quad + (\mathrm{R}\sin^2\beta + \mathrm{A.B}.r\cos^2\lambda),\end{aligned}$$

et le second terme devient

$$\mathrm{R} - \mathrm{RB}^2\cos^2\lambda + \mathrm{A.B}.r\cos^2\lambda,$$

ou

$$\mathrm{B}\left[\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} + (\mathrm{A}.r - \mathrm{B.R})\cos^2\lambda\right];$$

on a de même, en permutant A et B, R et r, α et β, λ et $\frac{\pi}{2} - \lambda$,

$$\begin{aligned}\mathrm{EN}\sin\mathrm{E} = &-\mathrm{A}(r\sin\alpha\cos\lambda + \mathrm{R}\sin\beta\sin\lambda\\ &+ \mathrm{A}\left[\frac{r}{\mathrm{A}} + (\mathrm{B.R} - \mathrm{A}.r)\sin^2\lambda\right];\end{aligned}$$

dans ces expressions de EM et de EN, les premières parenthèses sont identiques; les secondes parenthèses sont égales, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{R}{B} + (A.r - B.R)\cos^2\lambda = \frac{r}{A} + (B.R - A.r)\sin^2\lambda,$$

car cela donne

$$\frac{R}{B} - \frac{r}{A} = B.R - A.r,$$

et c'est la relation (δ); on en conclut $\frac{EM}{EN} = \frac{B}{A}$.

Ainsi l'on a $\frac{EM}{EN} = \frac{B}{A}$, c'est-à-dire que le rapport des puissances du point E, par rapport aux cercles (A) et (B), est $\frac{B^2}{A^2}$; la même chose ayant lieu pour les points F, G, H, il résulte d'un théorème connu que le quadrilatère EFGH reste inscrit à un cercle fixe (O) du faisceau (A, B), lorsque les cordes MM' et NN' varient. Le fait que ce quadrilatère est inscriptible à un cercle se vérifie d'ailleurs aisément.

Comme on a

$$\frac{\overline{EA}^2 - r^2}{\overline{EB}^2 - R^2} = \frac{B^2}{A^2} \qquad \text{ou} \qquad A^2.\overline{EA}^2 - B^2.\overline{EB}^2 = A^2 r^2 - B^2 R^2,$$

le centre O de ce cercle est déterminé par la relation

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{B^2}{A^2} \qquad (A < B);$$

à cause de

$$A^2 = \frac{\overline{IA}^2}{r^2} = \frac{\overline{IA}^2}{IA.JA} = \frac{\overline{IA}}{\overline{JA}}, \qquad B^2 = \frac{\overline{IB}}{\overline{JB}},$$

on a donc

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{JB}} : \frac{\overline{IA}}{\overline{JA}},$$

de sorte que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ est égal au rapport anharmonique (I, J, B, A), et l'on en déduit, en appliquant la relation d'Euler pour quatre points en ligne droite,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{IB}.\overline{JA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{IA}.\overline{JB}} = \frac{\overline{AB}}{-\overline{JI}.\overline{AB}} = \frac{-1}{\overline{JI}};$$

on a encore

$$\overline{JO} = \overline{JA} + \overline{AO} = \overline{JA} + \frac{\overline{IB}.\overline{JA}}{\overline{JI}} = \frac{\overline{JA}.\overline{JB}}{\overline{JI}}$$

ou

$$\overline{JO}.\overline{JI} = \overline{JA}.\overline{JB};$$

or, si l'on appelle X et Y les points d'intersection de la droite JO avec le cercle (O), on a

$$\frac{2}{\overline{JI}} = \frac{1}{\overline{JX}} + \frac{1}{\overline{JY}} = \frac{2\overline{JO}}{\overline{JX}.\overline{JY}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{JO}.\overline{JI} = \overline{JX}.\overline{JY},$$

de sorte que le produit $\overline{JO}.\overline{JI}$ représente la puissance du point J par rapport au cercle (O); cette puissance est donc égale à $\overline{JA}.\overline{JB}$, d'où il suit que l'axe radical du cercle (O) et du cercle de diamètre AB passe en J ; dès lors, les circonférences décrites sur les segments RS comme diamètres sont orthogonales au cercle (O), puisqu'elles le sont au cercle de diamètre AB ; on a

$$\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JA}.\overline{JB} = -\overline{JO}.\overline{JI} = -\overline{JX}.\overline{JY},$$

et les quadrangles (X, Y, R, S) sont orthogonaux, comme les quadrangles (A, B, R, S).

Les triangles IRS sont conjugués par rapport au cercle (O); ils ont leur orthocentre en O, et à cela correspond la relation $\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JO}.\overline{JI}$.

Le fait que le lieu des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles (A) et (B) est constant se trouve être un cercle du faisceau (A, B), fait évident si les cercles se coupent, se trouve établi d'une manière générale si l'on part de ce théorème : la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est égale au double produit de la distance des centres par la distance du point à l'axe radical de deux cercles. Si l'on veut vérifier ici le fait en question pour le cercle (O), qui est un cercle particulier du faisceau, on peut vérifier la relation

$$\overline{OE}^2 = \overline{OI} \times \overline{OJ}.$$

La formule de Stewart

$$\overline{EA}^2.\overline{OB} - \overline{EB}^2.\overline{OA} = \overline{EO}^2.\overline{AB} - \overline{OA}.\overline{OB}.\overline{AB},$$

avec

$$\frac{\overline{OB}}{A^2} = \frac{\overline{OA}}{B^2} = \frac{\overline{AB}}{A^2 - B^2},$$

donne

$$A^2.\overline{EA}^2 - B^2.\overline{EB}^2 = (A^2 - B^2)\overline{EO}^2 - \frac{A^2.B^2.\overline{AB}^2}{A^2 - B^2};$$

on a donc

$$A^2 r^2 - B^2 R^2 + \frac{A^2.B^2.\overline{AB}^2}{A^2 - B^2} = (A^2 - B^2) OE^2;$$

or, si l'on se reporte à l'établissement de la formule (δ), on a (le sens positif étant de B vers A)

$$\overline{AB} = \overline{AI} - \overline{BI} = Ar - BR,$$

$$\overline{AB} = \overline{AJ} - \overline{BJ} = \frac{r}{A} - \frac{R}{B} = \frac{Br - AR}{A.B};$$

on peut donc écrire

$$\overline{AB}(Ar + BR) + \overline{AB}\,\frac{A.B(Br - AR)}{A^2 - B^2} = (A^2 - B^2)\,\overline{OE}^2,$$

ou

$$\frac{\overline{AB}(A^3 r - B^3 R)}{(A^2 - B^2)^2} = \overline{OE}\ .$$

Or on a, d'une part,

$$\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AI} = \frac{\overline{AB}.B^2}{A^2 - B^2} + Ar$$

$$= \frac{(Ar - BR)B^2}{A^2 - B^2} + Ar = \frac{A^3 r - B^3 R}{A^2 - B^2};$$

on a, d'autre part,

$$\overline{OJ} = \overline{OA} + \overline{AJ} = \frac{\overline{AB}.B^2}{A^2 - B^2} + \frac{r}{A},$$

et, en évaluant cette fois $\overline{AB}$ par rapport à l'origine J,

$$\overline{OJ} = \frac{\frac{(Br - AR)B}{A}}{A^2 - B^2} + \frac{r}{A} = \frac{A(Ar - BR)}{A(A^2 - B^2} = \frac{\overline{AB}}{A^2 - B^2};$$

on a donc bien

$$\overline{OE}^2 = \overline{OI} \times \overline{OJ}.$$

On peut remarquer les formules

$$\overline{\mathrm{OJ}} = \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\mathrm{A}^2} = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\mathrm{B}^2}.$$

III. *b*. En ce qui concerne les angles γ et δ, on a, d'une part,

$$\frac{\mathrm{ME}}{\sin\gamma} = \frac{\mathrm{IE}}{\sin\alpha}, \qquad \frac{\mathrm{MH}}{\sin\delta} = \frac{\mathrm{IH}}{\sin\alpha},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MH}} = \frac{\mathrm{IE}\sin\gamma}{\mathrm{IH}\sin\delta},$$

relation évidente d'ailleurs; on a, d'autre part,

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{HN}'},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MH}} = \frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{HN}'} = \frac{\dfrac{\mathrm{IE}\cos\gamma}{\sin\beta}}{\dfrac{\mathrm{IH}\cos\delta}{\sin\beta}} = \frac{\mathrm{IE}\cos\gamma}{\mathrm{IH}\cos\delta};$$

la comparaison des deux résultats donne $\tan\gamma = \tan\delta$, ou $\gamma = \delta$. Ainsi, les demi-droites IE et IH sont également inclinées sur IM et sur IN; il en est de même des demi-droites IE et IF; il suit de là que les demi-droites IF et IH sont opposées. En conséquence, les diagonales EG et FH passent en I, et sont également inclinées sur MM′ et NN′.

Il est facile de voir géométriquement que IM est bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{EIH}}$; plus généralement, étant donnés deux cercles et un de leurs points limites I, considérons une sécante qui les rencontre aux points E et H, M et M_1 : si U et V sont les deux points qui divisent harmoniquement, les segments EH et MM_1, le cercle de diamètre UV est orthogonal aux deux cercles donnés; ce cercle passe donc en I, l'angle UIV est droit, les droites IU et IV sont bissectrices de leurs angles EIH et MIM_1. Si la sécante devient tangente en M à l'un des cercles, la droite IM est bissectrice de l'angle EIH.

Si l'on se donne la droite FIH, ce qui détermine les points F et H, on peut mener du point F deux tangentes au cercle (B), ce qui détermine deux points E; on a alors deux droites EIH; *la correspondance entre les droites* EIG *et* FIH *est une correspondance doublement quadratique.*

III. *c.* Si l'on suppose bien connue la théorie des polaires dans le cercle, comme le quadrangle EFGH est inscrit au cercle (O), on voit d'abord que les points R et S sont conjugués par rapport à ce cercle, d'où il suit que les circonférences décrites sur les segments RS comme diamètres sont orthogonales à la circonférence (O).

Le triangle diagonal du quadrangle EFGH est autopolaire par rapport au cercle (O); les côtés opposés EG et FH se croisent donc en un point qui est le pôle de RS, c'est-à-dire au point I, puisque le cercle (O) fait partie du faisceau (A, B); on a, en I, un faisceau harmonique (MM', NN', EG, FH), et c'est là une propriété de deux coniques bitangentes à une même conique. Le triangle variable IRS est autopolaire par rapport au cercle (O); son orthocentre est en O, et l'on a $\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JO}.\overline{JI}$; comme on a aussi $\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JA}.\overline{JB}$, on retrouve la relation $\overline{JO}.\overline{JI} = \overline{JA}.\overline{JB}$.

III. *d.* Le quadrilatère EFGH étant circonscrit à l'ellipse (C), le théorème de Brianchon montre encore que les diagonales EG et FH passent au point de croisement I des cordes de contact MM' et NN'; le faisceau en I est harmonique, de sorte que les droites rectangulaires MM' et XN' sont les bissectrices des angles que forment les droites EG et FH.

Le quadrangle EFGH étant inscrit à un cercle, les bissectrices des angles formés par les trois couples de côtés opposés aux points R, S, I, sont parallèles.

Remarque. — Le quadrilatère EFGH est un polygone de Poncelet, inscrit à un cercle fixe, et dont les côtés restent tangents à des cercles fixes, les divers cercles appartenant à un même faisceau. *On connaît des polygones mobiles dont chaque sommet décrit une conique particulière, dont chaque côté reste tangent à une conique particulière; pour le cas des triangles, on trouve deux systèmes différents de six coniques* (*Nouvelles Annales*, 1897, p. 449 et 454).

Mathématiques spéciales.

On considère dans un plan la parabole (P) *et la droite* (D) *dont les équations sont, en coordonnées rectangulaires,*

$$y^2 - 2px = 0, \qquad y - a = 0.$$

I. *Une droite variable* (Δ), *issue de l'origine* O, *rencontre* (P) *en un point* A, *et* (D) *en un point* B; *trouver le lieu* (C) *des points* M *et* M′ *symétriques par rapport à l'origine et conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B, M *étant supposé constamment entre* A *et* B.

Les tangentes en M *et* M′ *à* (C) *rencontrent respectivement en* I *et* I′ *la tangente en* A *à* (P); *construire le lieu* (Γ) *des points* I *et* I′ *et distinguer sur ce lieu les arcs qui correspondent à* I *des arcs qui correspondent à* I′.

Construire les tangentes en M *à* (C) *et en* I *à* (Γ).

II. *D'un point* I *de* (Γ) *on peut mener à* (C) *trois tangentes chacune d'elles rencontrant* (C) *en un point autre que le point de contact; montrer que les tangentes à* (C) *aux trois points ainsi définis concourent en un point* J *dont on exprimera les coordonnées en fonctions de celles de* I; *reconnaître si les tangentes menées de* I *ou de* J *à* (C) *sont réelles.*

Du point I *on mène à* (P) *une tangente autre que* IA; *soit* T *son point de contact; du point* I *on mène à* (C) *deux tangentes autres que* IM; *soient* T_1 *et* T_2 *les points, autres que les points de contact, où elles rencontrent* (C); *trouver le lieu du centre de gravité du triangle* TT_1T_2.

III. *Par l'origine on mène deux droites également inclinées sur les axes et rencontrant une tangente en un point* M *de* (C) *en des points* Q *et* Q′; *l'axe* OY *rencontre cette même tangente en* R; *trouver le lieu des points* Q′ *et* Q *tels que la somme des inverses des longueurs* OQ, OQ′ *soit égale à l'inverse de la longueur* OR.

Ce lieu comprend une partie d'une branche d'une courbe algébrique; trouver l'aire comprise entre cette branche et son asymptote.

Calcul différentiel et intégral.

I. *Soient* Δ *une droite donnée,* O *un point fixe sur cette droite.*

Déterminer les surfaces S *telles que la trace du plan tangent en un point quelconque* M, *sur le plan* ΔOM, *coupe le rayon vecteur* OM *sous un angle donné* α.

La recherche des surfaces S *se ramène à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles* E; *indiquer comment on peut engendrer les surfaces* S *à l'aide d'une caractéristique choisie de cette équation.*

II. *Les surfaces* Σ *qui coupent les rayons vecteurs issus d'un point donné* O *sous un angle donné* α *sont les intégrales d'une équation* F *aux dérivées partielles du premier ordre.*

1° *L'équation* F *admet-elle des surfaces* S *comme solutions particulières ?*

2° *Déterminer les surfaces* Σ.

Comment une surface Σ *peut-elle être engendrée à l'aide d'une caractéristique choisie, par seul déplacement du plan de cette courbe ? Quelles sont ses lignes de courbure ?*

3° *Une surface* Σ *déterminée peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe de surfaces* S *ou* Σ *particulières.*

On peut toujours choisir la famille d'enveloppées de telle sorte qu'en tout point de contact l'enveloppe et l'enveloppée aient mêmes centres de courbure principaux.

4° *Toute surface* Σ *peut être obtenue comme intégrale commune à l'équation* F *et à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre dont l'origine est analogue à celle de l'équation* E.

Mécanique.

Une boule pesante rencontre le sol supposé horizontal. On demande d'étudier son mouvement ultérieur à partir du moment où la boule touche le sol.

I. *On supposera la boule sphérique et homogène. On négligera la résistance de l'air et les frottements de roulement et de pivotement. On admettra l'hypothèse de Newton d'après laquelle la composante verticale de la vitesse du point* M *de la boule qui vient en contact avec le sol se trouve multipliée immédiatement après la rencontre avec le sol par un facteur négatif* $(-e)$ *qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact, avec* $0 \leqq e \leqq 1$.

II. *La discussion devra surtout mettre en évidence s'il y a glissement ou non-glissement dans les contacts. Elle montrera que la forme de la trajectoire du centre c de la boule dépend essentiellement (pour des substances données) de l'angle aigu* θ_1 *de la verticale descendante avec la vitesse initiale du point* M, fixe sur la boule, *qui vient en contact avec le sol.*

III. *On appellera m la masse de la boule,* ρ *son rayon, f le coefficient de frottement de glissement de la boule contre le sol. On prendra comme origine des axes fixes la position initiale o du centre c de la boule quand elle arrive au sol et comme axe oz une verticale ascendante. On appellera* α_1, β_1, γ_1, p_1, q_1, r_1 *les projections de la vitesse de c et de la vitesse angulaire de rotation instantanée de la boule au moment où elle touche le sol;* α'_1, β'_1, γ'_1, p'_1, q'_1, r'_1, *les valeurs de ces projections après la rencontre;* v_1 *et* v'_1, *les valeurs initiale et finale, au moment de la rencontre avec le sol, de la composante horizontale de la vitesse du point* M, $\left[\operatorname{tang} \theta_1 = \dfrac{v_1}{(-\gamma_1)}\right]$.

Comme application de la discussion, on pourra indiquer, en supposant $e = \frac{1}{2}$, $f = \frac{2}{7}$, *les formes de la trajectoire de c pour* $\operatorname{tang} \theta_1 = 1$, $\operatorname{tang} \theta_1 = \frac{5}{2}$ *ou* $\operatorname{tang} \theta_1 = 4$. *On pourra aussi examiner le cas où* $\beta_1 = p_1 = 0$, $\operatorname{tang} \theta_1 < \frac{3}{2}$ *et* $\left(v_1 - \frac{7}{2} \alpha_1\right)$ *nul ou très petit.*