Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Platrier

Application du théorème de M. Appell sur le moment de la quantité du mouvement par rapport à un complexe d'un mobile soumis à une force appartenant à ce complexe. Généralisation de l'équation de Clairaut

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 355-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__355_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[R6a]

APPLICATION DU THÉORÈME DE M. APPELL SUR LE MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN COMPLEXE D'UN MOBILE SOUMIS A UNE FORCE APPARTENANT A CE COMPLEXE. — GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE CLAIRAUT;

PAR M. CH. PLATRIER,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Dans son *Cours de Mécanique rationnelle* (t. I, p. 311), M. Appell généralise ainsi l'application à un mobile soumis à une force : 1° constamment perpendiculaire à un axe; 2° située constamment dans un même plan avec un axe, des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement : *Si la résultante des forces agissant sur un mobile appartient à un complexe linéaire, le moment de la quantité de mouvement par rapport à ce complexe est constant.*

Autrement dit, si la force XYZ, appliquée au mobile (x, y, z) de masse 1, satisfait constamment à l'équation

$$\begin{aligned} &pX + qY + rZ + a(yZ - zY) \\ &\quad + b(zX - xZ) + c(xY - yX) = 0, \end{aligned}$$

où p, q, r, a, b, c sont des constantes, nous dirons qu'elle appartient au complexe (p, q, r, a, b, c) et nous aurons la relation :

$$\begin{aligned} &p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} + r\frac{dz}{dt} + a\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\ &\quad + b\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + c\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.} \end{aligned}$$

Nous nous proposons d'appliquer ce théorème au mouvement d'un mobile astreint à se déplacer sur un hélicoïde quelconque d'axe Oz et de pas $h = 2\pi k$, ce mobile n'étant soumis qu'à la réaction normale de la surface.

Nous remarquerons tout d'abord que les normales à tous les hélicoïdes d'axe Oz et de pas h forment un complexe linéaire; en effet, les normales en question qui passent par un point $M(x, y, z)$ sont toutes situées dans le plan mené par M perpendiculairement à la tangente en M à l'hélice de pas h et d'axe Oz. Les paramètres directeurs de cette tangente sont

$$-y, \quad x, \quad k.$$

Appelons a, b, c les paramètres directeurs d'une droite du complexe passant par M. Le complexe considéré est défini par la relation

$$-ya + xb + kc = 0.$$

Nous en déduirons immédiatement que le mobile dont nous étudions le mouvement est soumis à la réaction normale de l'hélicoïde N (XYZ) appartenant au complexe $(0, 0, k, 0, 0, 1)$.

Appliquons alors le théorème de M. Appell en appelant ρ la distance du mobile à Oz; v, sa vitesse; ω, l'angle de sa trajectoire en M avec l'hélice de pas h et d'axe Oz passant par M; φ, l'angle de la tangente en M à cette hélice avec un plan horizontal.

Décomposons la quantité de mouvement suivant deux directions rectangulaires : MT tangente à l'hélice et MN; le moment par rapport au complexe de la composante suivant MN (droite du complexe) est nul.

Et le théorème de M. Appell donne, par suite, en tout point de la trajectoire,

$$(1) \qquad kv \cos\omega \sin\varphi + \rho v \cos\omega \cos\varphi = \text{const.}$$

Or l'angle φ est tel que $\tang\varphi = \frac{k}{\rho}$, et l'on sait qu'un mobile astreint à l'unique condition de se déplacer sur une surface décrit avec une vitesse constante une ligne géodésique de la surface.

L'équation (1) peut donc s'écrire, en remplaçant φ par sa valeur,

$$(2) \qquad \sqrt{\rho^2 + k^2} \cos\omega = \text{const.}$$

Elle définit les lignes géodésiques des hélicoïdes et constitue une généralisation de l'équation de Clairaut :

$$(3) \qquad \rho \cos\omega = \text{const.}$$

qui définit les lignes géodésiques des surfaces de révolution (hélicoïdes de pas nul, c'est-à-dire tels que $k = 0$).

Au point de vue de la théorie des surfaces l'équation (2) peut d'ailleurs être considérée comme une conséquence de l'équation de Clairaut et du théorème de Bour sur l'application des hélicoïdes sur les surfaces de révolution.