NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Discussion des équations de degrés 2, 3, 4, 5 au point de vue des racines multiples

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 340-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__340_1>

[A3c]

DISCUSSION DES ÉQUATIONS DE DEGRÉS 2, 3, 4, 5 AU POINT DE VUE DES RACINES MULTIPLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

PREMIÈRE PARTIE.

1. *Semi-invariants.* — Les seules fonctions des coefficients qui figurent dans la discussion d'une équation algébrique entière $X = 0$, au point de vue des racines multiples, sont les semi-invariants (*voir* la Note précédente). On doit supposer qu'on a fait choix d'un système de semi-invariants fondamentaux.

2. *Constantes de Sturm.* — Parmi les expressions qu'on peut construire avec les semi-invariants fondamentaux, les suivantes jouent un rôle important dans la question des racines multiples; elles ne suffisent d'ailleurs pas à la résoudre.

Considérons une équation de degré m, dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; nous désignons par $D_{m,p}$ la somme des produits des carrés des différences *des racines prises p à p*; on aura par exemple

$$D_{m,3} = \Sigma(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2.$$

Les quantités D sont en nombre $m-1$, depuis $D_{m,2}$ ou $\Sigma(\alpha-\beta)^2$, jusqu'à $D_{m,m}$ qui est le produit des carrés des différences des racines. L'équation aux carrés des différences des racines donnerait à considérer $\frac{m(m-1)}{2}$ quantités, moins intéressantes d'ailleurs que les quantités D.

Le produit $D_{m,m}$ est à un facteur numérique près, positif ou négatif, le quotient du discriminant par $a^{2(m-1)}$, a étant le coefficient de x^m; on trouvera plus loin une règle pour le signe de ce facteur.

D'une manière générale, à des facteurs près qui sont ici sans importance, les quantités D sont les constantes de Sturm, c'est-à-dire les coefficients des termes de degré le plus élevé dans les polynomes de Sturm.

3. *Usage de ces constantes.* — Voici la part de ces constantes dans la discussion.

a. Si l'on a

$$D_{m,m} \neq 0, \tag{1}$$

l'équation n'a pas de racine multiple.

b. Si l'on suppose $D_{m,m}=0$, l'équation a une racine double, soit $\alpha\equiv\beta$; on a alors, pour former $D_{m,m-1}$, les m quantités

$$\beta,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \ldots,$$

et $D_{m,m-1}$ se réduit à

$$2\times\Pi(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2\ldots.$$

Si l'on suppose

$$D_{m,m}=0,\qquad D_{m,m-1}\neq 0, \tag{2}$$

l'équation a simplement une racine double.

c. Si l'on suppose $D_{m,m-0}$, $D_{m,m-1=0}$, deux des $m-1$ quantités $\beta, \gamma, \ldots$ sont égales, soit qu'on ait $\gamma = \delta$, auquel cas l'équation a deux racines doubles, soit qu'on ait $\beta = \gamma$, auquel cas l'équation a une racine triple. Dans les deux cas, on a, pour former $D_{m,m-2}$, m quantités où l'on peut trouver seulement $m-2$ quantités distinctes, et $D_{m,m-2}$ se réduit à un produit unique affecté d'un coefficient numérique. Si l'on suppose

$$(3) \qquad D_{m,m} = 0, \qquad D_{m,m-1} = 0, \qquad D_{m,m-2} \neq 0,$$

l'équation a simplement deux racines doubles ou une racine triple.

On peut continuer ainsi, jusqu'au cas où, tous les D étant nuls, l'équation a une racine dont l'ordre de multiplicité est m.

4. *Insuffisance de ces constantes.* — Il restera à distinguer le cas de deux racines doubles du cas d'une racine triple, ... ; on devra pour cela faire intervenir autrement les semi-invariants.

5. *Équation du deuxième degré.* — Soit le polynome

$$ax^2 + 2bx + c;$$

outre a, qui est un semi-invariant sans intérêt, il existe un invariant qui est le discriminant $ac - b^2$ ou γ :

$$D_{2,2} = \frac{-2^2}{a^2}\gamma;$$

il y a une racine double si γ est nul.

6. *Équation du troisième degré.* — Soit le polynome

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d;$$

les semi-invariants fondamentaux sont

$$a, \qquad \gamma = ac - b^2, \qquad \delta = a^2 d - 3abc + 2b^3;$$

le discriminant se construit avec ces semi-invariants.

On a

$$D_{3,3} = \frac{-3^3}{a^4}(a^2 d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4b^3 d - 3b^2 c^2)$$
$$= \frac{-3^3}{a^6}(\delta^2 + 4\gamma^3)$$

et

$$D_{3,2} = \frac{-2 \times 3^2}{a^2}\gamma;$$

la seconde expression du discriminant s'obtient directement sur le polynome $U^3 + 3\gamma U + \delta$, qui résulte de la transformation $U = ax + b$ (Note précédente).

On a alors ce Tableau :

$4\gamma^3 + \delta^2 \neq 0$	pas de racine multiple,
$\left.\begin{matrix} 4\gamma^3 + \delta^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{matrix}\right\}$	une racine double,
$\left.\begin{matrix} 4\gamma^3 + \delta^2 = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix}\right\}$	une racine triple.

7. *Équation du quatrième degré.* — Soit le polynome

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

on utilise les semi-invariants

$$a, \qquad \gamma = ac - b^2, \qquad \delta = a^2 d - 3abc + 2b^3,$$

et les invariants

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^3 - c^3;$$

ces cinq quantités sont liées (Note précédente) par la relation

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 + \delta^2.$$

On a

$$D_{4,4} = \frac{4^4}{a^6}(S^3 - 27T^2),$$

$$D_{4,3} = \frac{-3 \times 4^3}{a^4}(2\gamma S - 3aT),$$

$$D_{4,2} = \frac{-3 \times 4^2}{a^2}\gamma.$$

Mais ces quantités ne suffisent pas à la discussion : δ et S vont intervenir autrement. Les conditions

$$S^3 - 27T^2 = 0, \qquad 2\gamma S - 3aT = 0, \qquad \gamma \neq 0,$$

relatives au cas de deux racines doubles ou d'une racine triple, donnent

$$S^2(a^2 S - 12\gamma^2) = 0;$$

on peut donc avoir

$$S = 0,$$

ou bien

$$S = \frac{12\gamma^2}{a^2}, \qquad T = \frac{8\gamma^3}{a^3}, \qquad a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3,$$

d'où

$$\delta = 0,$$

d'après la relation écrite plus haut. Or, d'une manière générale, la condition $\delta = 0$ exprime (pour une équation du 4^e degré) que la somme de deux des racines est égale à la somme des deux autres. L'hypothèse $\delta = 0$ correspond donc ici au cas de deux racines doubles et ne convient pas au cas d'une racine triple; pour une racine triple on a, dès lors,

$$S = 0,$$

et la réciproque est exacte, car on ne peut avoir

$$S = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = 0,$$

avec

$$\delta = 0,$$

puisque cela donnerait

$$\gamma = 0.$$

On a ce Tableau :

$$S^3 - 27T^2 \neq 0 \quad \text{pas de racine multiple,}$$

$$\left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT \neq 0 \end{array}\right\} \text{une racine double,}$$

$$\left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{deux racines doubles ou une} \\ \quad \text{racine triple, selon que } \delta \\ \quad \text{ou S est égal à zéro,} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \text{une racine quadruple.}$$

Il est facile de montrer qu'il y a deux racines doubles pour

$$2\gamma S - 3aT = 0, \qquad \delta = 0, \qquad \gamma \neq 0;$$

la condition $\delta = 0$ donne en effet, d'après la relation qui a déjà servi dans le calcul inverse,

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 \qquad \text{ou} \qquad a^2\gamma S = 12\gamma^3,$$

ou, avec $\gamma \neq 0$,

$$S = \frac{12\gamma^2}{a^2}, \qquad T = \frac{8\gamma^3}{a^3}, \qquad S^3 - 27T^2 = 0.$$

On remarquera que, avec $S^3 - 27T^2 = 0$, on peut avoir

$$\delta = 0,$$

sans qu'il y ait deux racines doubles; les racines peuvent être $\alpha, \alpha, \alpha + h, \alpha - h$, aussi bien que $\alpha, \alpha, \beta, \beta$, pour que la somme de deux des racines soit égale à la somme des deux autres Il faut garder la condition

$$2\gamma S - 3aT = 0.$$

8. *Équation du cinquième degré.* — Soit le polynome

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f;$$

on aura à utiliser les semi-invariants

$$\begin{aligned}
&a,\\
\gamma &= ac - b^2,\\
S &= ae - 4bd + 3c^2,\\
T &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,\\
\Sigma &= 3a^2df - 2a^2e^2 - 9abcf + abde\\
&\quad + 18ac^2e - 12acd^2 + 6b^3f - 15b^2ce + 10b^2d^2,
\end{aligned}$$

l'invariant

$$\begin{aligned}
J = a^2f^2 &- 10abef + 4acdf + 16ace^2 - 12ad^2e\\
&+ 16b^2df + 9b^2e^2 - 12bc^2f - 76bcde + 48bd^3\\
&+ 48c^3e - 32c^2d^2,
\end{aligned}$$

et enfin le discriminant. La fonction Σ a moins de termes que la fonction $\Sigma - S^2$, indiquée également par Salmon; je la désigne par Σ parce que, si l'on fait

$$a = 0, \qquad 5b = a', \qquad 10c = 4b', \qquad \ldots, \qquad f = e',$$

elle se réduit (sauf un facteur numérique) à $a'^2 S'$.

Les constantes de Sturm ont été calculées par M. Roberts (*Quarterly Journal*, t. IV, p. 175). Voici leurs valeurs, à des facteurs près qu'on peut négliger ici

$$\begin{array}{ll}
D_{5,5} & \text{ou le discriminant,}\quad a^4f^4 + \ldots,\\
D_{5,4} & \gamma J - 4S\Sigma + 8(S^3 - 27T^2),\\
D_{5,3} & 5\gamma S - 9aT,\\
D_{5,2} & \gamma.
\end{array}$$

Si l'équation a deux racines doubles, exactement, on peut étudier J, *qui est un invariant*, en supposant que ces racines sont zéro et ∞ ; on a ainsi

$$J = -32c^2d^2 \neq 0.$$

Si l'équation a une racine triple, en la supposant nulle ou infinie, on a $J = 0$. (Salmon fait observer que, si une équation de degré m a une racine multiple d'ordre p, avec $2p > m$, tous les invariants sont nuls; c'est ainsi que, pour l'équation du quatrième degré, on avait

$$S = 0, \qquad T = 0,$$

dans le cas d'une racine triple).

Si $D_{5,5}$ et $D_{5,4}$ sont nuls, il y a au moins une racine triple; en supposant que cette racine soit zéro, ce qui est permis au point de vue des semi-invariants, on a

$$S = 3c^2;$$

selon qu'il y a une racine triple et une racine double, ou une racine quadruple, on a

$$S \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad S = 0.$$

On a ce Tableau :

$D_{5,5} \neq 0$	pas de racine multiple,
$D_{5,5} = 0$, $D_{5,4} \neq 0$	une racine double,
$D_{5,5} = 0$, $D_{5,4} = 0$, $D_{5,3} \neq 0$	deux racines doubles ou une racine triple, selon qu'on a $J \neq 0$ ou $J = 0$,
$D_{5,5} = 0$, $D_{5,4} = 0$, $D_{5,3} = 0$, $D_{5,2} \neq 0$	une racine double et une racine triple, ou une racine quadruple, selon qu'on a $S \neq 0$ ou $S = 0$;

si tous les D sont nuls, on a une racine quintuple.

La fonction

$$\Pi(\alpha+\beta-\gamma-\delta),$$

avec 15 facteurs, s'annule dans le cas de deux racines doubles et ne s'annule pas dans le cas d'une racine triple; c'est un semi-invariant de poids égal à 15, d'ordre égal à 12, contenant par exemple un terme en $a^9 f^3$. Pour le calculer, on chercherait la condition qui exprime que la somme de deux racines est égale à la somme des deux autres; la racine restante étant celle de l'équation

$$ax - m = 0,$$

on exprimerait que, dans l'équation

$$X : (ax - m) = 0,$$

la somme de deux racines est égale à la somme des autres, ce qui donne

$$m^3 + 3bm^2 + (8ac - 5b^2)m + 16a^2d - 40abc + 25b^3 = 0;$$

on éliminerait m entre cette relation et la relation

$$X\left(\frac{m}{a}\right) = 0.$$

On aurait à écarter la solution parasite $a = o$, à laquelle correspond la valeur

$$m = -5b.$$

9. *Remarque sur le signe du discriminant.* — Bien que ce signe soit ici sans importance, je rappelle le fait suivant qui mériterait d'être plus connu.

Appelons discriminant, et désignons par Δ, le quotient par a du résultant des équations $X = 0$, $X' = 0$, résultant dont le signe ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les différences des racines des deux équations. Ce résultat est, pour une équation du quatrième degré :

$$\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & 4b & 6c & 4d & e \\ a & 3b & 3c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 3b & 3c & 3d \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & 4b & 6c & 4d & e \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -3c & -3d & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & -3c & -3d & -e \\ 0 & 0 & 0 & a & 3b & 3c & 3d \end{vmatrix},$$

et l'on en prend le quotient par a. Ce quotient contient un terme en a^3e^3, provenant de

$$a^2 \times \begin{vmatrix} 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et ce terme est a^3e^3. D'une manière générale, on aura le terme $a^m g^m$, que m soit pair ou impair.

Le discriminant ainsi défini,

$$\begin{array}{lcl} ac - b^2, & & \\ a^3d^2 + \ldots & \text{ou} & \dfrac{\delta^2 + 4\gamma^3}{a^2}, \\ a^2e^3 + \ldots & \text{ou} & S^3 - 27T^2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

est de signe contraire au produit des carrés des *différences des racines pour un polynome de degré* $4k+2$ *ou* $4k+3$, *tandis qu'il a le même signe que ce produit pour un polynome du degré* $4k$ *ou* $4k+1$. (Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 345; *voir* ci-dessus les expressions des quantités $D_{2,2}$, $D_{3,3}$ d'une part, $D_{4,4}$ d'autre part.)

Si, partant d'une équation du quatrième degré, on passe à une équation du troisième degré en faisant

$$a = 0, \qquad 4b = a' \qquad 6c = 3b', \qquad 4d = 3c', \qquad e = d',$$

on a

$$S = -\frac{3}{4}\gamma', \qquad T = -\frac{1}{16}\delta',$$

$$S^3 - 27T^2 = \frac{-3^3}{4^4}(4\gamma'^3 + \delta'^2) = \frac{-3^3}{4^4}a'^2(a'^2d'^2 + \ldots),$$

avec un signe —. Il en sera de même chaque fois que l'on passera d'une équation de degré pair à l'équation de degré immédiatement inférieur.

DEUXIÈME PARTIE.

10. Je vais reprendre d'une manière différente l'étude de l'équation du quatrième degré

$$X \equiv ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

on obtiendra ici les expressions des racines multiples.

Le polynome dérivé du polynome X est $4X_1$, en posant

$$X_1 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d.$$

On a

$$(1) \qquad aX = X_1(ax+b) + R,$$

en posant

$$R = 3(ac-b^2)x^2 + 3(ad-bc)x + ae - bd.$$

On a ensuite

$$(2)\quad 3(ac-b^2)^2X_1 = R\times[a(ac-b^2)x+3b(ac-b^2) \\ -a(ad-bc)]+aY,$$

en posant

$$Y=[2(ac-b^2)S-3aT]x+[(ad-bc)S-3bT].$$

Il faut alors distinguer deux cas; et c'est là un défaut de la méthode, les deux cas n'étant pas distincts dans le cas où l'équation a simplement une racine double.

I. — $ac-b^2\neq 0$.

11. Pour que le polynome X ait une racine double et une seule, il faut et il suffit que le polynome Y ait une racine et que cette racine annule le polynome R. Nous admettrons que le discriminant de X est S^3-27T^2, et nous écrirons les conditions

$$S^3-27T^2=0,$$
$$2\gamma S-3aT\neq 0.$$

12. Si l'on veut que le polynome X ait deux racines doubles ou une racine triple, il faut et il suffit que les polynomes X et X_1 aient un plus grand commun diviseur R du second degré, non carré ou carré parfait. Dans les deux cas le polynome Y doit être identiquement nul, ce qui donne les conditions

$$S^3-27T^2=0,$$
$$2\gamma S-3aT=0.$$

On en conclut comme précédemment

$$\delta\times S=0.$$

On peut d'ailleurs observer qu'on a

$$aY=(2\gamma S-3aT)(ax+b)+\delta S.$$

Or le discriminant du polynome R, qui est bien du second degré avec l'hypothèse $\gamma \neq 0$, est

$$\gamma S + 3aT \quad \text{ou} \quad 3\gamma S,$$

eu égard à la condition

$$2\gamma S - 3aT = 0.$$

On a donc le résultat suivant :

$$\left.\begin{array}{rr} & S^3 - 27T^2 = 0 \\ & 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \text{d'où} & \delta \times S = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \delta = 0, & \text{deux racines double,} \\ S = 0, & \text{une racine triple:} \end{array}$$

il n'y a pas lieu d'accompagner la condition $\delta = 0$, de l'inégalité $S \neq 0$, car si l'on avait

$$\delta = 0, \qquad S = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = 0,$$

on aurait

$$\gamma = 0,$$

d'après une relation du n° 5.

II. — $ac - b^2 = 0$.

13. On a alors

$$R = 3(ad - bc)x + (ae - bd),$$

et, d'après l'égalité (2), le polynome Y est le produit du polynome R par $ad - bc$; on a

$$3(ad - bc)^2 = 2\gamma S - 3aT.$$

Il n'y a, par suite, rien de changé pour le cas d'une racine double; l'inégalité

$$ad - bc \neq 0$$

ne diffère pas de l'inégalité

$$2\gamma S - 3aT \neq 0.$$

Si l'on suppose

$$ad - bc = 0,$$

il ne peut y avoir de racine multiple que si le polynome R est identiquement nul, c'est-à-dire si l'on a

$$ae - bd = 0;$$

le polynome X est alors divisible par sa dérivée, il a une racine quadruple. La condition $ad - bc = 0$ équivaut à $2\gamma S - 3aT = 0$, qui se réduit d'ailleurs à $T = 0$; comme on a

$$aS = a(ae - bd) - 3b(ad - bc),$$

la condition $ae - bd = 0$ équivaut à $S = 0$, par suite à

$$S^3 - 27T^2 = 0.$$

14. En rapprochant les résultats obtenus, on retrouve le Tableau du n° 7.

15. Remarque I. — Lorsque le polynome X a une racine double unique, c'est la racine de l'équation $Y = 0$. Or, le hessien du polynome X est

$$H = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3 + \ldots;$$

considérons le covariant bien connu

$$2S.H - 3T.X,$$

ou

$$[2(ac - b^2)S - 3aT]x^4 + 4[(ad - bc)S - 3bT]x^3 + \ldots;$$

sa dérivée troisième, divisée par 24, est précisément le polynome Y. La racine double du polynome X est donc la racine du polynome

$$(2S.H - 3T.X)''' = 0.$$

C'est qu'en effet le covariant ci-dessus est

$$\frac{-a^4}{192}\Sigma(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2(x-\alpha)^4;$$

quand le polynome X a une racine double α, ce covariant se réduit à

$$\frac{-a^4}{192}\times 2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\delta)^2(x-\alpha)^4.$$

16. Remarque II. — Salmon observe que, dans le cas de deux racines doubles, le polynome X et son hessien ne diffèrent que par un facteur constant; on a donc pour ce cas

$$\frac{ac-b^2}{a}=\frac{ad-bc}{2b}=\frac{ae+2bd-3c^2}{6c}=\frac{be-cd}{2d}$$
$$=\frac{ce-d^2}{e}=\frac{3T}{2S};$$

le covariant $2S.H-3T.X$ est alors identiquement nul.

Les conditions

$$2(ac-b^2)S-3aT=o,$$
$$(ad-bc)S-3bT=o$$

expriment directement que le polynome Y est identiquement nul; l'égalité

$$\frac{ac-b^2}{a}=\frac{ad-bc}{2b}$$

n'est pas autre chose que $\delta=o$. L'équation en $\frac{1}{x}$ déduite de l'équation $X=o$ rend compte des égalités

$$2(ce-d^2)S-3eT=o,$$
$$(be-ed)S-3dT=o.$$

Dans le cas d'une racine triple α, le hessien est à un facteur constant près $(x-\alpha)^4$. On a alors

$$S=0, \qquad T=0,$$

et le covariant $2S.H-3T.X$ est encore identiquement nul.

Si l'on se reporte à l'expression de ce covariant donnée plus haut pour le cas d'une racine double, on voit encore qu'il est identiquement nul pour $\gamma=\delta$ (deux racines doubles) et pour $\alpha=\gamma$ (une racine triple).

17. Remarque III. — On aurait pu employer la transformation $U=ax+b$, qui substitue au polynome X le polynome

$$U^4+6\gamma U^2+4\delta U+(a^2S-3\gamma^2);$$

d'une part on aurait eu

$$aY=(2\gamma S-3aT)U+\delta S;$$

d'autre part on aurait eu

$$a^2R=3\gamma U^2+3\delta U+(a^2S-3\gamma^2),$$

dont le discriminant prend facilement la forme $\gamma S+3aT$.