NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 330-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__330_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2155.

(1901, p. 240.)

Il y a deux systèmes de coniques ayant leurs foyers sur une conique c et un contact double avec c; les coniques du premier système enveloppent outre c le cercle sur lequel se coupent les tangentes orthogonales de c; les coniques de l'autre système enveloppent outre c les deux directrices de c. (L. KLUG.)

PREMIÈRE SOLUTION,

Par l'AUTEUR.

Il y a deux systèmes de coniques passant par les foyers d'une conique k et ayant un contact double avec k : les cordes de contact du premier système sont les diamètres de k

et aussi les diamètres des coniques de ce système; les cordes de contact de l'autre système sont parallèles à l'axe focal de k et aussi à l'axe focal des coniques de ce système. Donc : si une conique a un contact double avec la conique donnée c et ses foyers sur c, ces foyers sont les extrémités d'un diamètre ou d'une corde parallèle à l'axe focal de c.

Soient O le centre, AA_1 et BB_1 deux diamètres de la

Fig. 1.

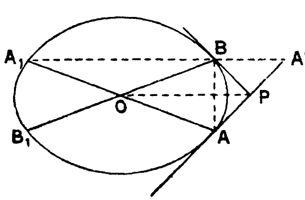
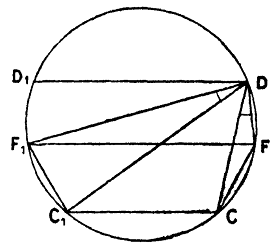


Fig. 2.



conique c avec la propriété que les tangentes aux points A, B se coupent orthogonalement au point P.

Si A' est le point symétrique de A par rapport à la tangente BP, les trois points A_1, B, A' sont en ligne droite et

$$A_1B \pm BA' = A_1A' = 2\,OP;$$

donc OP est égal au demi-grand axe d'une conique u, ayant ses foyers aux points A, A_1 et un contact double avec c aux points B, B_1.

Donc, si l'on fait varier le diamètre AA_1, les coniques u ou les coniques du *premier* système enveloppent outre c le cercle concentrique avec c et de rayon OP.

Nous décrivons un cercle par les foyers F, F_1 de la conique c qui coupe c aux couples de points C, C_1 et D, D_1 symétriques à l'axe non focal de c.

Parce que les angles F_1DC_1, CDF sont égaux : la conique v avec les foyers CC_1 et passant par le point D a un contact double avec c aux points D, D_1. Mais les deux quadrilatères inscriptibles $DFCF_1$ et DFC_1F_1 nous donnent

$$CD.FF_1 = DF.CF_1 + DF_1.CF,$$
$$C_1D.FF_1 = DF.C_1F_1 + DF_1.C_1F$$

ou

$$(\mathrm{CD} + \mathrm{C_1 D})\mathrm{FF_1} = \mathrm{DF}(\mathrm{CF_1} + \mathrm{C_1 F_1}) + \mathrm{DF_1}(\mathrm{CF} + \mathrm{C_1 F})$$

et, si $2a$ est l'axe focal de l'ellipse c, on a

$$2a = \mathrm{CF_1} + \mathrm{C_1 F_1} = \mathrm{CF} + \mathrm{C_1 F} = \mathrm{DF} + \mathrm{DF_1}$$

et

$$\mathrm{CD} + \mathrm{C_1 D} = \frac{4a^2}{\mathrm{FF_1}}.$$

Résultat analogue pour l'hyperbole c.

Donc, les deux directrices de la conique c sont les tangentes de la conique v aux extrémités de l'axe focal. Alors toutes les coniques v, ayant un contact double avec c et leurs foyers aux extrémités des cordes parallèles à l'axe non focal de c, enveloppent outre c les deux directrices de c.

Note. — Pour la parabole c, les deux systèmes des coniques u et v se confondent et leur enveloppe est la directrice de la parabole.

DEUXIÈME SOLUTION,

Par M. E.-N. Barisien.

Prenons comme conique C l'ellipse

$$(\mathrm{C}) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

On voit qu'il existe : 1° un système de coniques bitangentes à C et concentriques à C; 2° un système de coniques bitangentes à C et ayant leur centre sur l'un des axes de C. (Pour que les foyers de ces dernières coniques soient sur C, il faut que leur centre soit sur l'axe non focal.)

Examinons donc ces deux systèmes.

I. *Coniques bitangentes et concentriques à* C. — L'équation générale d'une conique bitangente et concentrique à l'ellipse C est

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda(y - mx)^2 = 0,$$

ou

$$(1) \qquad (b^2 + \lambda m^2)x^2 + (a^2 + \lambda)y^2 - 2m\lambda xy - a^2b^2 = 0.$$

On sait que, pour la conique générale

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0,$$

les équations qui donnent les foyers (α, β) sont

$$(2)\quad (B^2 - AC)(\alpha^2 - \beta^2) - 2(CD - BE)\alpha + 2(AE - BD)\beta - D^2 + E^2 + (A - C)F = 0,$$

$$(3)\quad (B^2 - AC)\alpha\beta - (AE - BD)\alpha - (CD - BE)\beta - DE + BF = 0.$$

Or, ici

$$A = b^2 + \lambda m^2,\qquad B = - m\lambda,\qquad C = a^2 + \lambda,$$
$$D = 0,\qquad E = 0,\qquad F = - a^2 b^2.$$

Les équations aux foyers deviennent donc

$$(4)\quad [a^2 b^2 + \lambda(a^2 m^2 + b^2)](\alpha^2 - \beta^2) - [c^2 + \lambda(1 - m^2)]a^2 b^2 = 0,$$

$$(5)\quad [a^2 b^2 + \lambda(a^2 m^2 + b^2)]\alpha\beta - m\lambda a^2 b^2 = 0.$$

Si les foyers sont sur C, on doit avoir, en outre,

$$(6)\quad b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Il faut éliminer α et β entre (4), (5) et (6)

De (4) et (6) on tire les valeurs de α^2 et β^2, qui, portées dans (5), donnent une équation en λ qui se réduit au premier degré, et l'on a

$$\lambda = - \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)(a^4 m^2 + b^4)}.$$

Cette valeur de λ, portée dans (1), conduit à l'équation ordonnée par rapport à m

$$(7)\quad a^6 m^2 [b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(y^2 - b^2)] + 2 m a^4 b^4 xy + b^6 [a^2 y^2 + (a^2 + b^2)(x^2 - a^2)] = 0.$$

L'enveloppe est donc

$$[b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(y^2 - b^2)] \times [a^2 y^2 + (a^2 + b^2)(x^2 - a^2)] - a^2 b^2 x^2 y^2 = 0$$

et s'écrit

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

On a donc bien pour enveloppe des coniques (1) l'ellipse C et son cercle de Monge

$$(8)\qquad x^2+y^2-a^2-b^2=0.$$

Remarque. — Si l'on calcule les longueurs des axes de l'ellipse (7), on retrouve pour le demi-axe focal $\sqrt{a^2b^2}$, car les sommets du grand axe sont situés sur le cercle (8). On trouve pour le demi-petit axe

$$ab\sqrt{\frac{a^4m^2+b^4}{a^6m^2+b^6}}.$$

Le lieu des sommets du petit axe est la quartique

$$(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2)=a^4x^2+b^4y^2$$

qui a pour aire $\pi(a^2+b^2-ab)$, différence des aires de C et de son cercle de Monge.

II. *Coniques bitangentes à* C *et ayant leur centre sur le petit axe de* C. — L'équation générale de ces coniques est

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2+\mu(y-k)^2=0,$$

ou

$$(9)\qquad b^2x^2+(a^2+\mu)y^2-2k\mu y+\mu k^2-a^2b^2=0.$$

En faisant dans (2) et (3)

$$\begin{array}{lll} A=b^2, & B=0, & C=a^2+\mu, \\ D=0, & E=-k\mu, & F=\mu k^2-a^2b^2, \end{array}$$

on a les équations aux foyers

$$(10)\qquad \begin{array}{l} b^2(a^2+\mu)(\alpha^2-\beta^2)+2b^2k\mu\beta \\ \qquad -k^2\mu^2+(c^2+\mu)(\mu k^2-a^2b^2)=0, \end{array}$$

$$(11)\qquad \alpha[(a^2+\mu)\beta-k\mu]=0,$$

auxquelles il faut adjoindre l'équation (6).

De (11) on tire

$$\beta=\frac{k\mu}{a^2+\mu}.$$

En portant dans (6), on a

$$\alpha^2 = a^2 - \frac{a^2 k^2 \mu^2}{b^2(a^2+\mu)^2}.$$

Ces valeurs de α et β, portées dans (10), conduisent à

$$\mu = -\frac{a^2 b^4}{c^2 k^2 + b^4}.$$

Cette valeur de μ, portée dans (9), conduit à l'équation suivante, ordonnée par rapport au paramètre variable k,

$$k^2[c^2(b^2x^2 + a^2y^2) - a^4b^2] + 2a^2b^4ky + b^4(x^2 - a^2) = 0.$$

De sorte que l'équation de l'enveloppe est

$$[c^2(b^2x^2 + a^2y^2) - a^4b^2](x^2 - a^2) - a^4b^2y^2 = 0$$

ou

$$(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)(c^2x^2 - a^4) = 0.$$

L'enveloppe comprend donc l'ellipse C et ses deux directrices $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

Cas où la conique C *est une parabole.* — Dans ce cas, les deux systèmes n'en forment plus qu'un seul, et l'enveloppe comprend la parabole et sa directrice. De sorte qu'on a la propriété suivante :

Les paraboles qui sont bitangentes à une parabole P *et ont leur foyer sur* P, *sont tangentes aussi à la directrice de* P.

Généralisation de la question. — I. Si au lieu du cercle de Monge de l'ellipse C, on considère un cercle quelconque concentrique S,

$$\text{(S)} \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

on trouve les propriétés suivantes :

Si l'on considère les coniques Σ *qui sont bitangentes à la fois à l'ellipse* C *et à son cercle orthoptique* S :

1° *Le lieu des foyers de* Σ *est l'ellipse* U

$$\text{(U)} \qquad \frac{x^2}{P^2 - b^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

(Si $R^2 = a + b^2$, c'est-à-dire si S est le cercle orthoptique de C, l'ellipse U devient bien C.)

2° *Le lieu des sommets du petit axe de* Σ *est la quartique*

$$(x^2+y^2)[(R^2-b^2)x^2+(R^2-a^2)y^2]$$
$$= a^2(R^2-b^2)x^2+b^2(R^2-a^2)y^2,$$

d'où l'aire est

$$\sigma = \pi R^2 - \pi\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)},$$

c'est-à-dire la différence des aires de S et de U.

3° *Les directrices de* Σ *enveloppent l'ellipse* V

$$(V) \qquad x^2(R^2-b^2)+y^2(R^2-a^2) = R^3,$$

qui, dans le cas de la question proposée, est

$$a^2x^2+b^2y^2 = (a^2+b^2)^2.$$

II. Si, au lieu des deux directrices de l'ellipse C, on considère deux droites D et D' perpendiculaires au grand axe, $x = \pm d$, on a la propriété suivante :

Si l'on considère les coniques qui sont bitangentes à la fois à l'ellipse C *et aux droites* D, D', *le lieu de leurs foyers est la conique*

$$\frac{x^2}{d^2}+\frac{y^2}{d^2-a^2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Pour $d = \dfrac{a^2}{c}$, on retrouve l'ellipse C.