MONFRAIX

Généralisation d'une formule de Laplace relative aux probabilités des erreurs

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 302-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__302_1>

[I2e]

GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE LAPLACE RELATIVE AUX PROBABILITÉS DES ERREURS;

PAR M. LE LIEUTENANT MONFRAIX.

Laplace a donné de la probabilité pour que la somme des erreurs faites dans n observations soit numérique-

(1) C. SERVAIS, *La courbure et la torsion*, etc., p. 40.

ment égale à x, la formule très générale suivante :

$$2A = \frac{2}{\pi} dx \int_0^x \cos(\alpha x)\, d\alpha \left[2 \int_0^x \varphi(x) \cos(\alpha x)\, dx \right]^n,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est la loi de probabilité des erreurs dans une épreuve, x la limite positive de ces erreurs. Pour la démonstration de cette formule et les conséquences intéressantes que l'on peut en tirer nous renvoyons à un article de M. Hélie publié dans le *Mémorial de l'Artillerie navale*, t. III, 1875.

Nous nous proposons dans ce qui va suivre de résoudre le problème plus général suivant :

Supposons que dans une mesure l'erreur soit la résultante d'un très grand nombre d'erreurs ayant respectivement pour loi de probabilité

$$\varphi_1(x_1), \quad \varphi_2(x_2), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x_n),$$

et soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

leurs limites. Quelle est la probabilité pour que l'erreur résultante soit numériquement égale ou inférieure à un nombre donné?

Partageons les intervalles

$$-x_1 x_1, \quad -x_2 x_2, \quad \ldots, \quad -x_n x_n$$

en intervalles partiels d'étendue $d\xi$ et considérons les polynomes

$$\sum_1^{m_1} {}_{k_1} (e^{k_1 i\alpha d\xi} + e^{-k_1 i\alpha d\xi})\, \varphi_1(k_1\, d\xi)\, d\xi;$$

. . . .

$$\sum_1^{m_n} {}_{k_n} (e^{k_n i\alpha d\xi} + e^{-k_n i\alpha d\xi})\, \varphi_n(k_n\, d\xi)\, d\xi;$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers tels que

$$m_1\, d\xi = x_1, \qquad m_2\, d\xi = x_2, \qquad \ldots, \qquad m_n\, d\xi = x_n.$$

A des infiniment petits près tels que

$$2\varphi_1(0)\,d\xi,\quad 2\varphi_2(0)\,d\xi,\quad \ldots,\quad 2\varphi_n(0)\,d\xi,$$

ces polynomes ont respectivement pour valeur

$$2\int_0^{x_1}\varphi_1(x)\cos\alpha x\,dx,\quad \ldots,\quad 2\int_0^{x_n}\varphi_n(x)\cos\alpha x\,dx.$$

Un terme quelconque de leur produit sera de la forme

$$e^{(\sigma_1 d\xi+\sigma_2 d\xi+\ldots+\sigma_n d\xi)\,i\alpha}\,\varphi_1(\sigma_1\,d\xi)\,d\xi\ldots\varphi_n(\sigma_n\,d\xi)\,d\xi.$$

Or le produit

$$\varphi_1(\sigma_1\,d\xi)\,d\xi\ldots\varphi_n(\sigma_n\,d\xi)\,d\xi$$

représente la probabilité du concours des erreurs

$$\sigma_1\,d\xi\ldots\sigma_n\,d\xi,$$

et nous pourrons dire que la probabilité pour que l'erreur résultante ait une valeur donnée $l d\xi$ est le coefficient de

$$e^{li\alpha d\xi},$$

dans le développement du produit des polynomes considérés.

Soit A ce coefficient; la probabilité d'une erreur numériquement égale à $l d\xi$ sera 2A. Ce développement sera de la forme

$$A(e^{li\alpha d\xi}+e^{-li\alpha d\xi})+B(e^{pi\alpha d\xi}+e^{-pi\alpha d\xi})+\ldots.$$

Multiplions-le par

$$\frac{e^{li\alpha d\xi}+e^{-li\alpha d\xi}}{2}\,d\alpha=\cos(l\alpha\,d\xi)\,d\alpha.$$

L'un des termes du produit sera A $d\alpha$, tous les autres conserveront la même forme et, en intégrant par rapport à α de o à $\frac{\pi}{d\xi}$, nous aurons

$$A\,\frac{\pi}{d\xi} = \int_0^{\frac{\pi}{d\xi}} \cos(l\alpha\, d\xi)\, d\xi \left[2^n \int_0^{x_1} \varphi_1(x)\cos(\alpha x)\, dx \right.$$
$$\left. \times \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \varphi_n(x)\cos(\alpha x) dx \right].$$

Si le nombre des erreurs composantes est très grand, l aura une très grande valeur et $d\xi$ étant infiniment petit nous pourrons remplacer le produit indéterminé $l d\xi$ par x, de sorte que

$$2A = \frac{2}{\pi}\, d\xi \int_0^{\infty} \cos(\alpha x)\, d\alpha \left[2^n \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \right],$$

expression d'où l'on déduit la formule de Laplace si l'on suppose que toutes les erreurs composantes suivent la même loi de probabilité.

Admettons que ces erreurs suivent la loi de Gauss et posons

$$\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-a^2x^2}, \qquad X = \infty,$$

a prenant les valeurs a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Nous aurons, en appliquant une formule connue,

$$2\int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-a^2x^2} \cos(\alpha x)\, dx = e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2}}$$

et, par suite,

$$A = \frac{dx}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \sum \frac{1}{4a_1^2}} \cos(\alpha x)\, d\alpha$$

et

$$A = dx\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\sum \frac{1}{a_1^2}}}\, e^{-\frac{x^2}{\sum \frac{1}{a_1^2}}}.$$

Posons

$$\frac{1}{a^2}=\sum\frac{1}{a_1^2},$$

nous aurons

$$A = \frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2x^2}\,dx.$$

Ceci nous montre que l'erreur résultante suit la loi de Gauss ([1]) et qu'on peut la considérer comme due à une épreuve isolée dont la précision a est donnée par la relation

$$\frac{1}{a^2}=\sum\frac{1}{a_1^2}.$$

Reprenons la relation

$$A = \frac{dx}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x)\,d\alpha\left[2^n\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\right],$$

elle représente la probabilité d'une erreur totale égale à x, la probabilité d'une erreur totale numériquement inférieure à x aura pour valeur

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^{x} dx\int_0^\infty \cos(\alpha x)\,d\alpha\left[2^n\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\right]$$

ou

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,d\alpha\left[2^n\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}\right].$$

La somme des erreurs est nécessairement inférieure à $x_1+x_2+\ldots+x_n$ en valeur absolue; la probabilité d'une erreur inférieure à Σx_1 est donc égale à 1 et nous

([1]) Nous rappellerons que la démonstration directe de ce théorème a été donnée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XIV, 1895, p. 133).

aurons

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{\alpha}\,d\alpha \times \Omega\left[2\int_0^{x_1}\varphi_1(x)\cos(\alpha x)\,dx\right],$$

Ω désignant le produit des diverses intégrales. La seule hypothèse faite sur les fonctions φ est que

$$2\int_0^{X}\varphi(x)\,dx = 1;$$

on a en effet la certitude que l'une des erreurs est numériquement inférieure à sa limite.

Nous poserons

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{2\int_0^{X} f(x)\,dx},$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque continue entre o et x. La relation ci-dessus deviendra

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{\alpha}\,d\alpha\,\Omega\,\frac{\int_0^{x_1} f_1(x)\cos\alpha x\,dx}{\int_0^{x_1} f_1(x)\,dx}.$$

Si en particulier toutes les fonctions f_1 sont des constantes, il restera

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x_1}{\alpha x_1}\,\frac{\sin\alpha x_2}{\alpha x_2}\cdots\frac{\sin\alpha(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2},$$

dont l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin n\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^n = \frac{\pi}{2}$$

est un cas particulier.