NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. SERVAIS

Sur la courbure des biquadratiques gauches de première espèce

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 289-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__289_0>

[M³6b]

SUR LA COURBURE DES BIQUADRATIQUES GAUCHES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

---

1. Soient MNPQ un quadrangle inscrit dans une conique Σ, ABC le triangle diagonal, $A \equiv (MN, PQ)$, $B \equiv (MP, NQ)$, $C \equiv (MQ, NP)$; m la tangente au point M; $P_1 \equiv (m, QP)$, $N_1 \equiv (m, QN)$, $A_1 \equiv (m, CB)$, $B_1 \equiv (m, CA)$; a et b les droites AMN, BMP. Le rayon de courbure ρ de la conique Σ au point M est donné par la formule (¹)

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{MN_1 \, MP_1}{N_1 P_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

Si l'on désigne par C_1 le point (m, AB) on a

$$(MN_1 A_1 C_1) = -1, \qquad (MP_1 B_1 C_1) = -1$$

ou

$$\frac{2}{MN_1} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MC_1}, \qquad \frac{2}{MP_1} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

De ces égalités on déduit

$$\frac{2N_1P_1}{MN_1 . MP_1} = \frac{A_1B_1}{MA_1 . MB_1};$$

par suite

$$\rho = \frac{MA_1 . MB_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

(¹) SERVAIS, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. I, 1906).

Une conique étant déterminée par un triangle conjugué ABC, *un point* M *et la tangente* m, *le rayon de courbure en ce point est donné par la formule*

$$\rho = \frac{MA_1 . MB_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

A_1, B_1 *désignent les points* (m, CB), (m, CA); a, b *les droites* MA, MB.

2. Une biquadratique gauche de première espèce est déterminée par le tétraèdre ABCD conjugué aux quadriques dont elle est l'intersection, un de ses points M_1 et la tangente m_1 en ce point. Le plan osculateur μ_1 au point M_1 de la courbe est le plan tangent en M_1 à l'hyperboloïde (H) conjugué au tétraèdre ABCD et ayant pour génératrice m_1. Les arêtes opposées AB et CD, AC et BD, AD et BC déterminent dans le plan μ_1 les sommets opposés P et P_1, Q et Q_1, R et R_1 d'un quadrilatère complet et les droites p et p_1, q et q_1, r et r_1 projetant de M_1 les sommets P et P_1, Q et Q_1, R et R_1 sont en involution. C'est une involution de tangentes conjuguées à l'hyperboloïde (H); par suite l'un des rayons doubles est la génératrice m_1, ou la tangente à la biquadratique au point M_1.

3. Les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC sont coupés par une transversale m issue du point M, aux points A_1, B_1, C_1; les sommets A, B, C sont projetés de M suivant les droites a, b, c; on a

$$(MA_1 B_1 C_1) = (mabc),$$

car si M_1 est le point (BC, AM) on a

$$(MA_1 B_1 C_1) = (M_1 A_1 CB) = (amcb) = (mabc).$$

4. Les faces BCD, ACD, ABD, ABC déterminent

sur la tangente m_1 les points A_1, B_1, C_1, D_1 situés respectivement sur $R_1 Q_1$, RQ, RQ_1, $R_1 Q$; on désigne par K_1 le point (m_1, PP_1); la propriété 3, appliquée successivement aux triangles $PP_1 Q$, $PP_1 Q_1$, et à la transversale m_1 issue du point M_1, donne

$$(mq_1pp_1) = (M_1 K_1 A_1 C_1),$$
$$(mqp_1p) = (M_1 K_1 D_1 B_1).$$

D'après le n° 2, on a

$$(mq_1pp_1) = (mqp_1p),$$

donc

$$(M_1 K_1 A_1 C_1) = (M_1 K_1 D_1 B_1) = (K_1 M_1 B_1 D_1),$$

et le point K_1 est le conjugué de M_1 dans l'involution $(A_1 B_1, C_1 D_1)$. On déduit de là la construction du plan μ_1, osculateur en M_1 à la biquadratique. On détermine le conjugué K_1 du point M_1 dans l'involution $(A_1 B_1, C_1 D_1)$, la droite $K_1 PP_1$ issue de ce point K_1 et s'appuyant sur les arêtes opposées AB, CD du tétraèdre ABCD, est dans le plan osculateur cherché (¹).

5. Le plan osculateur μ_1 coupe le cône de sommet D, perspectif à la biquadratique, suivant une conique Σ tangente en M_1 à la droite m_1 et conjuguée au triangle $P_1 Q_1 R$. Le rayon de courbure de cette conique Σ, qui est aussi celui de la biquadratique, est donné par la formule (n° 1) :

$$\rho = \frac{M_1 A_1 . M_1 B_1}{A_1 B_1} \, \frac{\sin(rq_1)}{\sin(m_1 r)\sin(m_1 q_1)}.$$

Les droites $r \equiv M_1 R$, $q_1 \equiv M_1 Q_1$ sont les traces sur le plan μ_1 des plans $M_1 AD$, $M_1 BD$; on les désignera pour la symétrie des notations par a_1, b_1. Ainsi :

(¹) C. Servais, *Sur le complexe tétraédral* (*Mathesis*, 3ᵉ série, t. IX, p. 7).

Une biquadratique gauche de première espèce étant déterminée par le tétraèdre conjugué ABCD, *le point* M_1 *et la tangente* m_1 *en ce point, le rayon de courbure au point* M_1 *de la courbe est donné par la formule*

$$\rho = \frac{M_1 A_1 . M_1 B_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1)\sin(m_1 b_1)},$$

les points A_1, B_1 *sont les traces de la tangente* m_1, *sur les faces* CDB, CDA *du tétraèdre; les droites* a_1, b_1 *sont les traces des plans* M_1DA, M_1DB *sur le plan osculateur* μ_1 *à la courbe.*

6. Le point M_1 détermine sur la biquadratique le quadruple M_1, M_2, M_3, M_4. A ce quadruple correspond, dans l'homologie harmonique ayant pour centre le point A et pour plan d'homologie BCD, le quadruple M'_1, M'_2, M'_3, M'_4. Dans les homologies harmoniques :

$$(B, CDA), \quad (C, DAB), \quad (D, ABC),$$

on a les groupes de points correspondants :

$$\begin{array}{ll}
(M_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_2, M'_1, M'_4, M'_3), \\
(M_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_3, M'_4, M'_1, M'_2), \\
(M_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_4, M'_3, M'_2, M'_1).
\end{array}$$

La biquadratique gauche est projetée du point M'_4 sur le plan μ_1 suivant une cubique plane; pour la facilité les projections des points considérés seront indiquées par les notations de ces points. La tangente m'_4 à la biquadratique gauche au point M'_4 rencontre les tangentes m_1, m_2, m_3, m_4 à la même courbe aux points M_1, M_2, M_3, M_4; par suite les points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique forment un quadruple sur cette courbe; son tangentiel est la trace M'_4 de m'_4 sur le plan μ_1. Cette trace est la projection du point M'_4 de la biquadratique sur le plan μ_1. Les homologies considérées plus haut montrent que les points M_1, M_4, M'_1, M'_4 de la biquadratique sont dans le plan ADM_1 ; donc les points M_1, M_4, M'_1 de la cubique plane sont sur la droite a_1 intersection des plans μ_1 et ADM_1 (n° 5). De même les points M_1, M_3, M'_2 de la cubique sont sur la droite b_1, intersection des plans μ_1 et BDM_1. Le rayon de courbure de la cubique plane égal à celui de la biquadratique est donc donné par la formule du n° 5. Par suite :

Soient M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 *un quadruple d'une cubique plane*, M_1 *le point de la courbe ayant* M'_4 *pour tangentiel ;* A_1, B_1 *les points d'intersection de la tangente* m_1 *au point* M_1 *avec les tangentes aux points* M'_1, M'_2 ; a_1, b_1 *les droites* $M_1M'_1$, $M_1M'_2$; *le rayon de courbure de la cubique au point* M_1 *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{M_1A_1 M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1)\sin(m_1 b_1)}.$$

7. Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique formant un quadruple, le triangle $M_2M_3M_4$ est conjugué à la conique polaire du point M_1. Le rayon de courbure au point M_1 de cette conique est donné par la formule

$$\rho' = \frac{M_1A_2.M_1B_2}{A_2B_2} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1)\sin(m_1 b_1)},$$

A_2, B_2 sont les points (m_1, M_2M_3) (m_1, M_2M_4), a_1, b_1 les droites $M_1M_4M'_1$, $M_1M_3M'_2$. On sait que le rayon de courbure ρ de la cubique au point M_1 est égal à la moitié de ρ' ; par suite :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 *est un quadruple d'une cubique plane, le rayon de courbure de la courbe au point*

M_1 *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{1}{2}\,\frac{MA_2.MB_2}{A_2B_2}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(m_1a_1)\sin(m_1b_1)},$$

A_2, B_2 *sont les points de rencontre de la tangente* m_1 *au point* M_1 *avec les droites* M_2M_3, M_2M_4; a_1, b_1 *les droites* M_1M_4, M_1M_3.

8. Des n^os 6 et 7 on déduit

$$2\frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1} = \frac{M_1A_2.M_1B_2}{A_2B_2}.$$

Ainsi : *Soient* M_1, M_2, M_3, M_4 *un quadruple d'une cubique plane*; M'_1, M'_2, M'_3 *respectivement les points* (M_1M_4, M_2M_3), (M_1M_3, M_2M_4), (M_1M_2, M_3M_4); A_1, B_1 *les points de rencontre de la tangente* m_1 *au point* M_1 *avec les tangentes aux points* M'_1, M'_2; A_2, B_2 *les points de rencontre de* m_1 *avec les droites* M_2M_3, M_2M_4, *on a*

$$2\frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1} = \frac{MA_2.MB_2}{A_2B_2}.$$

9. Si C_1, C_2 sont les points de rencontre de la tangente m_1 avec la tangente au point M'_3 et la droite M_3M_4 on a de même

$$2\frac{MA_1.MC_1}{A_1C_1} = \frac{MA_2.MC_2}{A_2C_2}.$$

On déduit des deux dernières égalités

$$(M_1A_1B_1C_1) = (M_1A_2B_2C_2).$$

On peut établir autrement cette dernière propriété et déterminer le second point double de la projectivité déterminée par les trois couples de points A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Le tangentiel T du quadruple M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 est le corésiduel du groupe M_1, M_2, M_3, M_4, et le point

M'_4 est le tangentiel du quadruple $M_1 M_2 M_3 M_4$. Les coniques circonscrites au quadrangle $M_1 M_2 M_3 M_4$ rencontrent la cubique en des couples de points EF alignés sur T et la droite EF engendre un faisceau projectif au faisceau de coniques. Parmi ces coniques on considère les coniques dégénérées $(M_1 M_4, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$, la conique tangente à la cubique au point M_1 et celle qui passe par M'_4. Elles coupent une seconde fois la droite m_1 issue de M_1 aux points A_2, B_2, C_2, M_1, M'_4. Les rayons homologues du faisceau (T) sont TM'_1, TM'_2, TM'_3, TM_1, TM'_4 ; par suite

$$(A_1 B_1 C_1 M_1 M'_4) \overline{\wedge} (A_2 B_2 C_2 M_1 M'_4).$$

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 *un quadruple ayant pour tangentiel* M'_4 ; M'_1, M'_2, M'_3 *les points* $(M_1 M_4, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$; A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 *les points de rencontre de la tangente* $M_1 M'_4$ *respectivement avec les tangentes aux points* M'_1, M'_2, M'_3 *et les droites* $M_2 M_3$, $M_1 M_2$, $M_3 M_4$; *on a*

$$(A_1 B_1 C_1 M_1 M'_4) \overline{\wedge} (A_2 B_2 C_2 M_1 M'_4).$$

10. La tangente m_1 au point M_1 de la biquadratique gauche est une génératrice d'un hyperboloïde (H) circonscrit à la courbe ; soient s une génératrice de même système que m_1 ; M', P, Q trois points de la biquadratique μ', α_1, β_1 les plans $m_1 M'$, $m_1 P$, $m_1 Q$; P', Q', les traces de la droite $M_1 M'$ sur les plans sP, sQ. On a

$$s(M_1 P M' Q) \overline{\wedge} m_1 (M_1 P M' Q)$$

ou

$$(M_1 P' M' Q') \overline{\wedge} (\mu_1 \alpha_1 \mu' \beta_1).$$

De cette égalité on déduit

$$\frac{M_1 M'}{\sin(\mu_1 \mu')} = \frac{M'P'.M_1 Q'}{P'Q'} \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1)}{\sin(\mu' \alpha_1)\sin(\mu_1 \beta_1)}.$$

Si l'on suppose que le point M' se rapproche indéfiniment de M_1 à la limite on a

$$\tau = \frac{1}{3}\frac{M_1P_1.M_1Q_1}{P_1Q_1}\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)},$$

τ est le rayon de torsion de la courbe au point M_1; P_1, Q_1 les traces m_1 sur les plans sP, sQ.

11. Les points P et Q étant quelconques sur la biquadratique, on peut leur substituer les points M'_1, M'_2 de la courbe situés respectivement sur les droites AM_1, BM_1 joignant le point M_1 aux sommets A, B du tétraèdre conjugué. A la droite PP_1 génératrice de (H) il faudra substituer la génératrice analogue issue de M'_1; cette droite n'est autre que la tangente m'_1 à la courbe au point M'_1; elle correspond à la droite m_1 dans l'homologie harmonique (A, BCD), par conséquent le point $m_1\,m'_1$ analogue à P_1 est le point $A_1 \equiv (m_1, BCD)$. De même l'analogue de Q_1 est le point $B_1 \equiv (m_1, ACD)$; quant aux plans $m_1\,M'_1$ et $m_1\,M'_2$ ils sont identiques à m_1 A et m_1 B. Par suite :

Une biquadratique gauche de première espèce étant déterminée par le tétraèdre conjugué ABCD, *le point* M_1 *et la tangente* m_1 *en ce point, le rayon de torsion au point* M_1 *de cette courbe est donné par la formule*

$$\tau = \frac{1}{3}\frac{M_1A_1.M_1B_1}{A_1B_1}\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)};$$

les points A_1, B_1 *sont les traces de la tangente* m_1 *sur les faces* CDB *et* CDA *du tétraèdre; les plans* α_1, β_1 *projettent de la tangente* m_1 *les sommets* A, B; μ_1 *est le plan osculateur à la courbe du point* M_1.

12. *Lemme.* — Soient P_1, M_1, M_2, P_2 les sommets d'un

quadrilatère gauche; α_1, μ_1, μ_2, α_2 les plans $P_2 P_1 M_1$, $P_1 M_1 M_2$, $M_1 M_2 P_2$, $M_2 P_2 P_1$; on a

$$\begin{aligned} &P_1 P_2 . M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &\quad = M_1 P_1 . M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

Soient m_1, m_2, f_1, g_1, a_1 les droites $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, $P_1 P_2$, $M_1 M_2$, $M_1 P_2$. Dans les trièdres $(g_1 a_1 m_1)$, et $(f_1 a_1 m_2)$, et les triangles $P_1 P_2 M_1$ et $P_2 M_1 M_2$ on a

$$\frac{\sin(\mu_1 \alpha_1)}{\sin(a_1 g_1)} = \frac{\sin(\mu_1 \mu_2)}{\sin(a_1 m_1)}, \qquad \frac{\sin(\mu_2 \alpha_2)}{\sin(f_1 a_1)} = \frac{\sin(\alpha_1 \alpha_2)}{\sin(m_2 a_1)},$$
$$\frac{\sin(f_1 a_1)}{\sin(a_1 m_1)} = \frac{M_1 P_1}{P_1 P_2}, \qquad \frac{\sin(a_1 g_1)}{\sin(m_2 a_1)} = \frac{M_2 P_2}{M_1 M_2};$$

donc

$$\begin{aligned} &P_1 P_2 . M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &\quad = M_1 P_1 . M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

13. Soient M_1, M_2 deux points correspondants d'une biquadratique gauche; les tangentes m_1, m_2 en ces points sont deux génératrices de même système d'une quadrique (H) circonscrite à la courbe. Les rayons d'osculation p_1, p_2 en ces points sont deux génératrices de l'autre système; si q est une génératrice de ce système, on désigne par P_1, Q_1, P_2, Q_2 les points $m_1 p_2$, $m_1 q$, $m_2 p_1$, $m_2 q$; par α_1, β_1, μ_1, α_2, β_2, μ_2 les plans $(m_1 p_2)$, $(m_1 q)$, $(m_1 p_1)$, $(m_2 p_1)$, $(m_2 q)$, $(m_2 p_2)$; par τ_1 et τ_2 les rayons de torsion de la biquadratique aux points M_1 et M_2. Cela étant on a (10)

$$\begin{aligned} 9\tau_1\tau_2 = {} & \frac{M_1 P_1 . M_1 Q_1 . M_2 P_2 . M_2 Q_2}{P_1 Q_1 . P_2 Q_2} \\ & \times \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \sin(\mu_2 \beta_2)}. \end{aligned}$$

Dans les quadrilatères gauches $P_1 M_1 M_2 P_2$, $M_1 Q_1 Q_2 M_2$

et $P_1 Q_1 Q_2 P_1$ on a

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &P_1 P_2 . M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &\quad = M_1 P_1 . M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2), \\ &Q_1 Q_2 . M_1 M_2 \sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2) \\ &\quad = M_1 Q_1 . M_2 Q_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\beta_1 \beta_2), \\ &P_1 P_2 . Q_1 Q_2 \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \beta_2) \\ &\quad = P_1 Q_1 . P_2 Q_2 \sin(\mu_1 \mu_2) \sin(\beta_1 \beta_2); \end{aligned} \right.$$

par suite

$$9 \tau_1 \tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \frac{\overline{M_1 Q_1}^2 . \overline{M_2 Q_2}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2 . \overline{P_2 Q_2}^2}.$$

Ainsi : *Si* m_1, μ_1, τ_1 *et* m_2, μ_2, τ_2 *désignent les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion d'une biquadratique gauche en deux points correspondants* M_1 *et* M_2 ; P_1 *et* P_2 *les points* $m_1 \mu_2$, $m_2 \mu_1$; Q_1, Q_2 *les points d'appui sur* m_1 *et* m_2 *d'une sécante issue d'un point quelconque de la courbe, on a*

$$9 \tau_1 \tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \frac{\overline{M_1 Q_1}^2 . \overline{M_2 Q_2}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2 . \overline{P_2 Q_2}^2}.$$

14. Si la quadrique (H) est un paraboloïde, on peut supposer la génératrice q à l'infini, on a dans cette hypothèse

$$9 \tau_1 \tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)}.$$

Ainsi : *Si les tangentes* m_1 *et* m_2 *en deux points correspondants d'une biquadratique gauche sont des génératrices d'un paraboloïde, on a la relation*

$$9 \tau_1 \tau_2 = \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)}.$$

15. Si les points correspondants M_1, M_2 sont tels

que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre, on a $P_1 \equiv M_1$, $P_2 \equiv M_2$; par suite

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

Donc : *Si les points* M_1, M_2 *de la biquadratique gauche sont tels que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre, on a*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

16. Soient m_1, μ_1, τ_1 la tangente, le plan osculateur et le rayon de torsion en un point M_1 d'une cubique gauche; s, P, Q une sécante et deux points quelconques de la courbe; P_1, Q_1 les traces de m_1 sur les plans sP_1, sQ_1; α_1, β_1 les plans m_1 P, m_1 Q; on a

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\,\frac{M_1P_1 . M_1Q_1}{P_1Q_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)} \quad (^1).$$

On déduit de cette formule les théorèmes suivants :

Si m_1, μ_1, τ_1 *et* m_2, μ_2, τ_2 *désignent les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion d'une cubique gauche en deux points quelconques* M_1 *et* M_2; P_1 *et* P_2 *les points* $m_1\,\mu_2$, $m_2\,\mu_1$; Q_1, Q_2 *les points d'appui sur* m_1 *et* m_2 *d'une droite issue d'un point de la courbe arbitrairement choisi, on a*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2 . \overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2 . \overline{P_2Q_2}^2}.$$

Si les tangentes m_1 *et* m_2 *sont des génératrices d'un paraboloïde circonscrit à la cubique gauche,*

---

(1) C. Servais, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1906, p. 12).

on a

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

17. Les égalités (a) du n° 13 permettent d'écrire la valeur de l'expression $9\tau_1\tau_2$ sous la forme suivante

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\alpha_1\alpha_2)}\,\frac{\sin^2(\alpha_1\beta_1)\sin^2(\alpha_2\beta_2)}{\sin^2(\mu_1\beta_1)\sin^2(\mu_2\beta_2)},$$

on peut utiliser cette relation dans les n^{os} 13 et 16.

18. *Soient* (C_1) *et* (C_2) *deux courbes gauches quelconques,* m_1, μ_1, τ_1 *et* m_2, μ_2, τ_2 *les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion en deux points* M_1, M_2 *situés respectivement sur* (C_1) *et* (C_2); P_1, P_2 *les points* $m_1\mu_2$, $m_2\mu_1$; Q_1, Q_2 *deux points quelconques pris respectivement sur* m_1 *et* m_2; *l'expression*

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2.\overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2.\overline{P_2Q_2}^2},$$

est projective.

Soient α_1, β_1, α_2, β_2 les plans m_1M_2, m_1Q_2, m_2M_1 m_2Q_1; à la figure considérée correspond, dans une projectivité quelconque, une seconde figure dont les éléments seront représentés par les notations des éléments homologues de la première, mais accentuées. Pour les courbes (C_1) et (C'_1), (C_2) et (C'_2) on a [1]

$$\frac{1}{\tau_1}\,\frac{M_1P_1.M_1Q_1}{P_1Q_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)} = \frac{1}{\tau'_1}\,\frac{M'_1P'_1.M'_1Q'_1}{P'_1Q'_1}\,\frac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\mu'_1\alpha'_1)\sin(\mu'_1\beta'_1)},$$

$$\frac{1}{\tau_2}\,\frac{M_2P_2.M_2Q_2}{P_2Q_2}\,\frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu_2\alpha_2)\sin(\mu_2\beta_2)} = \frac{1}{\tau'_2}\,\frac{M'_2P'_2.M'_2Q'_2}{P'_2Q'_2}\,\frac{\sin(\alpha'_2\beta'_2)}{\sin(\mu'_2\alpha'_2)\sin(\mu'_2\beta'_2)}.$$

---

[1] C. SERVAIS, *La courbure et la torsion dans la collinéation et*

Ces égalités montrent que l'expression

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{M_1P_1.M_1Q_1.M_2P_2.M_2Q_2}{P_1Q_1.P_2Q_2} \times \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_2\alpha_2)\sin(\mu_1\beta_1)\sin(\mu_2\beta_2)}$$

est projective.

D'après les égalités (a) du n° **13** l'expression T peut s'écrire

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2.\overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2.\overline{P_2Q_2}^2},$$

on a aussi

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\alpha_1\alpha_2)}\,\frac{\sin^2(\alpha_1\beta_1)\sin^2(\alpha_2\beta_2)}{\sin^2(\mu_1\beta_1)\sin^2(\mu_2\beta_2)}.$$

Ces expressions sont donc projectives.

19. Si l'on suppose Q_1 et Q_2 à l'infini, T se réduit à

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

Cette expression n'est donc pas altérée par une transformation affine.

20. Si les plans osculateurs en M_1 et M_2 passent respectivement par les points M_2 et M_1, on a $P_1 \equiv M_1$, $P_2 \equiv M_2$ et l'expression T se réduit à :

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)} \quad (^1);$$

Cette expression est donc projective.

---

la réciprocité (*Mémoires in*-8 *de l'Académie royale de Belgique*, 1898, p. 7).

(1) DEMOULIN, *Sur la théorie générale des congruences rectilignes* (*Comptes rendus*, 1900, p. 1702).

21. Soient M_1, P_1, Q_1 trois points quelconques d'une génératrice m_1 d'une quadrique Σ; μ_1, α_1, β_1 les plans tangents en ces points; R_1, R'_1 les rayons de courbure principaux de la surface Σ au point M_1; on a

$$R_1 R'_1 = -\frac{\overline{M_1 P_1}^2 . \overline{M_1 Q_1}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2} \frac{\sin^2(\alpha_1 \beta_1)}{\sin^2(\mu_1 \alpha_1)\sin^2(\mu_1 \beta_1)} \quad [1].$$

On déduit de cette formule, par les égalités (a) du n° 13, les théorèmes suivants :

Soient M_1 *et* M_2 *deux points quelconques d'une quadrique* Σ; m_1 *et* a_1, m_2 *et* a_2 *les génératrices passant par ces points*; b *une génératrice du système* ($a_1, a_2, \ldots$); P_1, P_2, Q_1, Q_2 *les points* $m_1 a_2$, $m_2 a_1$, $m_1 b$, $m_2 b$; R_1 *et* R'_1, R_2 *et* R'_2 *les rayons de courbure principaux aux points* M_1 *et* M_2; μ_1 *et* μ_2 *les plans tangents à* Σ *en* M_1 *et* M_2; *on a*

$$R_1 R'_1 . R_2 R'_2 \sin^4(\mu_1 \mu_2) = \overline{P_1 P_2}^4 \frac{\overline{M_1 Q_1}^4 . \overline{M_2 Q_2}^4}{\overline{P_1 Q_1}^4 . \overline{P_2 Q_2}^4}.$$

Si la quadrique Σ *est un paraboloïde, on a*

$$R_1 R'_1 . R_2 R'_2 \sin^4(\mu_1 \mu_2) = \overline{P_1 P_2}^4.$$