Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 283-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__283_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1945.

(1902, p. 575.)

Déterminer les complexes tels que le couple [M, P], *formé sur chaque droite par le point central* M *de la corrélation normale et par le plan* P *passant par cette droite et normal au plan central de cette corrélation, forme un groupe de contact.*

On entend par là que les points M *peuvent être distribués sur une famille de surfaces telles que le plan tangent, en chaque point* M *à la surface qui y passe, soit précisément le plan* P.

A. PETOT.

SOLUTION,

Par M. A. B.

Rappelons quelques notions relatives aux complexes linéaires et congruences de droites, qui sont bien connues et qui rendront la solution immédiate.

1° Étant donnée une droite D d'un complexe, il existe une seule droite D' du complexe, rencontrant D *en un point* M. Soit P le plan limite formé par D' et D.

Sur la droite D, les couples [M, P] forment une corrélation anharmonique, dite *corrélation normale* du complexe.

2° Quand une congruence est formée de droites d'un complexe, si, pour une droite D de la congruence, on détermine les foyers F et F_1 et les plans focaux correspondants P et P_1, les deux couples [F, P_1] et [F_1, P] sont deux couples de la corrélation normale du complexe.

Pour les surfaces focales de la congruence, le plan tangent en F est P_1 et le plan tangent en F_1 est P.

3° Considérons une droite D d'un complexe, un point M de D et le plan P_1 relatif à un autre point M_1 de cette droite D.

Si les points tels que M peuvent être distribués en une famille de surfaces S, de façon que la surface S qui passe en M y admette le plan P_1 comme plan tangent, condition d'Euler, les plans M_1 relatifs aux plans tels que P_1 pourront à leur tour être distribués en une famille de surfaces S_1, de manière que la surface S_1 qui passe par M_1 y admette pour plan tangent le plan P relatif à M.

En effet, les droites du complexe peuvent par hypothèse (à cause du problème de Transon) être distribuées en une famille de congruences, dont les surfaces S sont les surfaces focales d'une série; les surfaces S_1 seront les surfaces focales de l'autre série, et, eu égard à l'alternance des plans focaux et des foyers, la proposition se trouve établie.

Appliquons ce résultat au complexe de l'énoncé. Pour lui, les points M et M_1 sont le point central C et le point à l'infini sur D; les plans P et P_1 correspondants sont rectangulaires.

Le complexe est formé par une famille de congruences de normales, puisque les plans focaux de ces congruences sont rectangulaires.

Comme un foyer est à l'infini et que les deux foyers sont les centres de courbure de la surface à laquelle D est normale, la surface lieu de C est développable.

Conclusion. — Le complexe est formé par les normales à une famille de surfaces développables dépendant d'un paramètre.

La réciproque est facile à démontrer.

2157.

(1910, p. 335.)

Démontrer, en partant de l'équation générale d'une quadrique en coordonnées tétraédriques, que le rapport des distances d'un point courant M *aux plans tangents en deux points fixes* M_1 *et* M_2 *est proportionnel au rapport des distances du plan tangent en* M *aux deux points fixes* M_1 *et* M_2.

G. F.

SOLUTION,

Par M. Thié.

Soient

$$f(X, Y, Z, T) = 0$$

l'équation de la quadrique, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, $(x, y, \ldots)$ les coordonnées respectives des points M_1, M_2 et M. L'équation du plan tangent en M_1 est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X + \frac{\partial f}{\partial y_1} Y + \ldots = 0,$$

en posant comme d'habitude

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f(X, Y. Z, T)}{\partial X} \qquad (X = x_1,\ Y = y_1, \ldots).$$

Si D_1 est la distance du point M à ce plan tangent, on a, k_1 ne dépendant que du point M_1,

$$D_1 = k_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x + \frac{\partial f}{\partial y_1} y + \ldots\right);$$

on a aussi, avec une notation analogue

$$D_2 = k_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} x + \frac{\partial f}{\partial y_2} y + \ldots\right),$$

d'où

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{k_1}{k_2}\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1} x + \ldots}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2} x + \ldots},$$

ou encore, en vertu d'une identité connue,

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} x_1 + \ldots}{\frac{\partial f}{\partial x} x_2 + \ldots}.$$

La fraction qui multiplie dans le second membre $\frac{k_1}{k_2}$ est égale au rapport des distances des points M_1 et M_2 au plan tangent en M, ce qui prouve la proposition énoncée.

Autre solution par M. Bouvaist.

2158.

(1910, p. 335.)

Soient AB *une corde d'une hyperbole équilatère de centre* O *et* C *le milieu de cette corde;* M *étant un point de la courbe et* P *étant la projection de ce point sur la corde* AB, *on a*

$$\widehat{AB, AM} + \widehat{BA, BM} = -\widehat{OC, OP}.$$

Cas où AB *est un diamètre.* G. F.

SOLUTION,

Par M. Thié.

Employons le signe de la congruence $\equiv$ pour indiquer que deux angles sont égaux à un multiple près de π. Si D est le milieu de MB, les quatre points O, D, C, P sont, comme on sait, sur un cercle, et l'on a

$$\widehat{OC, OP} \equiv \widehat{DC, DP}.$$

Soit M′ le symétrique du point M par rapport à AB. DC est parallèle à MA et DP est parallèle à MB′. On a donc

$$\begin{aligned}\widehat{DC, DP} &= \widehat{MA, BM'} = \widehat{MA, AB} + \widehat{AB, BM'} \\ &= -\widehat{AB, MA} - \widehat{AB, BM} \equiv -\widehat{AB, MA} - \widehat{BA, BM},\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\widehat{OC, OP} \equiv -\widehat{AB, MA} - \widehat{BA, BM},$$

ce qui est l'égalité à démontrer (en remplaçant, pour plus de généralité, le signe $=$ par le signe $\equiv$).

Si AB tend vers un diamètre, le point C tend vers le point O, et OC tend vers le diamètre conjugué de AB. Quand le point M varie sur l'hyperbole, le point P décrit AB, et le second membre de l'égalité a une valeur constante. On a donc dans ce cas

$$\widehat{AB, AM} + \widehat{BA, BM} = \text{const.}$$

Cela veut dire que AM et BM font avec AB des angles dont la somme est constante, et l'on en conclut immédiatement que ces droites engendrent des faisceaux *inversement* égaux. C'est un résultat bien connu.

Autres solutions par MM. Parrod et Bouvaist.

2159.

(1910, p. 336.)

Démontrer que les foyers de toutes les hyperboles équilatères d'un plan ayant un diamètre commun sont sur une lemniscate. L. Klug.

Solution,

Par M. Parrod.

Soient O le centre, A une extrémité du diamètre commun et F un foyer. Dans le triangle OAF, menons la hauteur AH et désignons par ρ le côté OF et par ω l'angle AOF; on a

$$OH^2 - AH^2 = \frac{\rho^2}{2},$$

donc

$$\rho^2 = 2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$
$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Autres solutions par MM. Abramescu, Barisien, Bouvaist et Klug.

2161.

(1910, p. 336.)

Une pyramide régulière, de sommet S, *a pour base un rectangle* ABCD. *On considère le paraboloïde de révolution de sommet* S *qui passe par le cercle circonscrit au rectangle* ABCD *et le parallélépipède indéfini dont ce rectangle est la section droite.*

Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci. M. D'OCAGNE.

SOLUTION,

Par M. PARROD.

Désignons par $2a$, $2b$ et h les dimensions du rectangle et la hauteur de la pyramide.

L'équation du paraboloïde étant

$$y^2 + z^2 = 2px,$$

on a

$$a^2 + b^2 = 2ph.$$

L'expression du volume commun est

$$V = \int_{-a}^{+a} dy \int_{-b}^{+b} \left(h - \frac{y^2+z^2}{2p}\right) dz = 4hab - \frac{4ab(a^2+b^2)}{6p}.$$

Simplifions, il vient

$$V = \frac{2}{3} \cdot 2a.2b.h.$$

C. Q. F. D.