NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARNAUD DENJOY

# Démonstration d'un théorème sur les séries à termes positifs

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 11 (1911), p. 272-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__272_1>

[D2aα]

# DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

On sait que, dans une série convergente $u_n$ à termes positifs et JAMAIS CROISSANTS avec $n$, le produit $n\,u_n$ tend vers zéro, quand $n$ croît indéfiniment.

Voici une démonstration qui me paraît fondée sur la vraie raison de ce fait :

$\varepsilon$ étant un nombre arbitrairement donné à l'avance, la convergence de la série équivaut à l'existence d'un nombre $p$ tel que

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit $n$ supérieur à $p$. D'après l'hypothèse de la non-croissance des termes de la série, on a

$$u_{p+1} \geqq u_{p+2} \geqq \ldots \geqq u_n.$$

Donc

$$(n-p)u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si donc

$$n > 2p,$$

on a

$$n u_n < \varepsilon$$

d'après

$$n - p > \frac{n}{2}.$$

Donc, $n u_n$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. C. Q. F. D.

On sait que la condition de la non-croissance de $u_n$ est essentielle. Si elle n'est pas exigée, $u_n$ n'est assujetti qu'à tendre vers zéro. (*Voir* Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*.) Par exemple, on aura

$$n u_n = \sqrt{n},$$

pour une infinité de valeurs de $n$, si, dans une série convergente à termes positifs, on remplace le terme dont le rang est $p^3$ par $\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$. Les termes substitués formant une série convergente, la série modifiée est encore convergente, sans que $n u_n$ tende vers zéro.