NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARNAUD DENJOY

Sur l'erreur commise dans le calcul approché d'une racine d'équation par la méthode de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 266-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__266_1>

[A3g]

SUR L'ERREUR COMMISE DANS LE CALCUL APPROCHÉ D'UNE RACINE D'ÉQUATION PAR LA MÉTHODE DE NEWTON;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Soient $f(x) = 0$ une équation, a et b deux nombres dont on sait qu'il y a entre eux une racine et une seule de cette équation. On considère a comme une valeur approchée de cette racine ξ. La méthode de Newton pour le calcul de ξ consiste, à prendre pour nouvelle valeur plus approchée de ξ, le nombre

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1.$$

L'erreur que l'on commet en choisissant pour ξ cette valeur a_1, est évaluée par une formule qui se trouve dans tous les Ouvrages d'enseignement et que nous rappelons ci-dessous. Cette formule me paraît défectueuse de deux points de vue :

1° Elle ne tient compte que de l'étendue de l'intervalle où est enfermée la racine ξ, et nullement de la petitesse du résultat de substitution $f(a)$, petitesse qui manifestement doit donner une indication sur la proximité où a se trouve de ξ.

2° Elle ne nous donne pas une limite inférieure non nulle de la valeur absolue de l'erreur commise, dans le cas où nous connaissons le sens de cette erreur, c'est-à-dire le signe de f''.

Nous allons donner à l'erreur une nouvelle forme ne prêtant à aucune de ces deux critiques.

Posons, selon l'usage,

$$\xi = a + h.$$

On a, f'' étant supposée continue entre a et ξ,

$$(1) \quad f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h) = 0 \qquad 0 < \theta < 1.$$

Comme

$$\xi - a_1 = \xi - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = h + \frac{f(a)}{f'(a)}$$

l'erreur E commise sur ξ en choisissant a_1 est

$$h + \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Cette erreur est égale à $-\frac{h^2}{2}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$. M étant le maximum de $|f''(x)|$ dans l'intervalle de a à b, on a

$$(2) \qquad E = \delta \frac{|b - a|^2}{2} \frac{M}{f'(a)}$$

avec $\delta^2 < 1$, le signe de δ étant connu, si celui de f'' l'est. Telle est la formule habituelle que nous voulons modifier.

Ecrivons l'équation (1) sous la forme plus maniable :

$$(3) \qquad A + Bh + Ch^2 = 0.$$

L'idée qui nous guidera est la suivante : Si A est suffisamment petit, h peut être développé suivant les puissances de A, le premier terme est $-\frac{A}{B}$, et le second nous donnera l'ordre de l'erreur commise en bornant h à son premier terme.

Résolvons l'équation (3). On a :

$$h = -\frac{B}{2C} \pm \frac{B}{2C}\sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}}.$$

La racine h, très petite en même temps que A, correspond au signe $+$ devant le radical. Donc, le radical ayant un sens arithmétique, nous écrirons

$$h = -\frac{B}{2C} + \frac{B}{2C}\sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}}.$$

Or, d'après

$$f(1+u) = f(1) + uf'(1) + \frac{u^2}{2}f''(1+\theta u) \qquad (0 < \theta < 1),$$

formule valable si $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sont continues quand x varie de 1 à $1+u$, on a, si $u > -1$,

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{2(1+\theta u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc

$$\frac{4AC}{B^2} < 1,$$

on a, en posant

$$u = -\frac{4AC}{B^2},$$

$$h = -\frac{B}{2C} + \frac{B}{2C}\left[1 - \frac{2AC}{B^2} - \frac{2A^2C^2}{B^4}\frac{1}{\left(1 - \frac{4\theta AC}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

ou, si

$$s = \frac{1}{\left(1 - \frac{4\theta AC}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$h = -\frac{A}{B} - s\frac{A^2C}{B^3}. \tag{4}$$

Supposons a assez voisin de ξ et par suite $f(a) = A$ assez petit pour nous donner

$$-1 < \frac{4AC}{B^2} < \frac{1}{2}.$$

Alors, si $AC > 0$, on a

$$1 < s < \sqrt{8} < 3:$$

si $AC < 0$, on a

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{8}} < s < 1.$$

Rétablissons les notations primitives. On a

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - s\frac{f^2(a)f''(a+\theta h)}{f'^3(a)}. \tag{5}$$

Lorsque $f(a)$ est très petit, s est très voisin de 1. Dans tous les cas, même si l'on ignore le signe de $f''(a+\theta h)$, dès que la condition

$$-1 < 2\frac{f(a)f''(a+\theta h)}{f'^2(a)} < \frac{1}{2} \tag{6}$$

est vérifiée, on sait que

$$\frac{1}{3} < s < 3$$

et l'on connaît la position de s relativement à 1 dès que l'on sait le signe de $f(a)f''(a+\theta h)$.

L'expression

$$E = -s\frac{f^2(a)f''(a+\theta h)}{f'^3(a)} \tag{7}$$

échappe aux deux critiques que nous avions faites à la formule habituelle.

En effet, d'abord elle fait jouer un rôle à la valeur de $f(a)$ dans la détermination de l'erreur commise en choisissant a_1 comme valeur approchée de ξ. En second lieu, si nous connaissons le signe de f'', c'est-à-dire le sens de l'erreur commise, nous avons une limite inférieure non nulle de la valeur absolue de l'erreur.

Il est à remarquer que notre formule ne nécessite pas, comme la formule (2), l'obligation d'enfermer ξ entre deux limites rapprochées. Elle montre que la méthode de Newton donne d'aussi bons résultats quand $f(a)$ est du signe opposé à $f''(x)$ (dans le domaine séparant la racine) que dans l'hypothèse adverse. (Même les résultats sont meilleurs dans le premier cas, contrairement à l'opinion courante, en ce sens que, à valeurs absolues égales de $\frac{AC}{B^2}$, le nombre a_1 est plus approché de ξ si AC est négatif que si AC est positif. La représentation géométrique donnerait de ce fait une explication intuitive.)

La formule (7) conduit donc à appliquer la méthode de Newton, dès que, par excès ou par défaut, on a de la racine une valeur approchée donnant un résultat de substitution suffisamment petit, sans *avoir à s'inquiéter du signe de* f'', à la condition de connaître seulement une limite supérieure de son module.

Soient M le maximum de $|f''(x)|$, N le minimum de $|f'(x)|$ dans une région où est comprise la racine ξ. Pour avoir ξ à $\frac{1}{n}$ près, par une seule application de la méthode de Newton, il suffira de trouver dans la région considérée un nombre a donnant dans $f(x)$ un résultat de substitution inférieur en valeur absolue à

$$\sqrt{\frac{2N^3}{3M}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

[et satisfaisant aussi à la condition (6) indépendante de n]. Si l'on connaît le signe de $f''(x)$ dans la région et si $f(a)f''(x)$ est négatif, la limite fournie par cette formule peut être multipliée par $\sqrt{3}$.

Donnons une application numérique de la formule (7).

Soit à résoudre l'équation

$$f(x) \equiv x^3 - 9x + 1 = 0.$$

Elle possède deux racines positives. Nous allons, pour la plus grande, déterminer sa valeur approchée à une unité près. A cette valeur, nous appliquerons la méthode de Newton et nous calculerons successivement par la formule habituelle (2) et par notre formule (7) l'erreur commise.

La plus grande racine ξ est comprise entre 2 et 3; on a

$$f(2) = -9, \qquad f(3) = 1.$$

Appliquons la méthode à la valeur à une unité près par excès, soit 3; a sera donc égal à 3. On a

$$a_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{1}{18}.$$

La formule (2), où nous faisons $b = 2$, $a = 3$, $M = 18$, nous enseigne simplement que l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{2}$.

La formule (7) nous donnera deux limites comprenant l'erreur. On a :

$$E = -s\,\frac{f^2(3)f''(3-\theta)}{2f'^3(3)}.$$

Évaluons

$$\frac{4AC}{B^2} = 4\frac{f(3)f''(3-\theta)}{f'^2(3)}.$$

Ce nombre est égal à

$$\frac{4 \times 6 \times (3-\theta)}{18^2} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{\theta}{3}\right).$$

Il est donc positif et inférieur à $\frac{2}{9} < \frac{1}{2}$. On a donc $1 < s < \sqrt{8}$. A la rigueur, $\sqrt{8}$ pourrait être remplacé par $\left(1 - \frac{2}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$.

L'erreur commise est négative et sa valeur absolue est d'une part inférieure à

$$\frac{3}{2}\,\frac{f^2(3)f''(3)}{2f'^3(3)} = \frac{1}{432},$$

et d'autre part supérieure à

$$\frac{f^2(3)f''(2)}{2f'^3(3)} = \frac{1}{972}.$$

Le rapport des deux limites est $\frac{9}{4}$.

La formule habituelle, qui nous donne seulement une limite supérieure de l'erreur, nous la donne encore 200 fois trop forte.