NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Détermination des complexes dont les surfaces résolvantes sont de révolution et coaxiales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 262-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__262_0>

[$O^1 7a$]

DÉTERMINATION DES COMPLEXES DONT LES SURFACES RÉSOLVANTES SONT DE RÉVOLUTION ET COAXIALES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Dans mon article *Sur un complexe du quatrième ordre*, j'ai montré que les surfaces résolvantes du complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires Oxz et Oyz interceptent des segments de longueur constante, étaient, pour une certaine répartition des rayons de ce complexe, des surfaces de révolution autour de Oz. Je me propose de former l'équation dont dépendent tous les complexes jouissant de la même propriété : ce serait une erreur de croire qu'elle caractérise les complexes de révolution; le complexe cité n'est nullement de révolution et, pour un complexe de révolution donné, la nature des résolvantes de Transon reste subordonnée au choix des points de départ des rayons.

A chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, Transon associe une droite de cosinus directeurs X, Y, Z. Les surfaces résolvantes ne sont autres que les surfaces de tourbillon dans le champ de vecteurs (X, Y, Z), ainsi que cela résulte de l'équation même donnée par Transon. Le problème que je me propose d'étudier est donc le suivant : il s'agit de déterminer un champ de vecteurs de longueur égale à l'unité, tel que toutes les lignes de tourbillon soient des circonférences coaxiales

$$z = \text{const.}, \qquad x^2 + y^2 = \text{const.}$$

On aura donc des relations de la forme suivante

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \lambda y,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = - \lambda x,$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0;$$

λ est une fonction de (x, y, z). Il résulte de la troisième équation et des relations

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} + \lambda y, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} + \lambda x,$$

que λ n'est point quelconque et satisfait à la condition

$$y \frac{\partial \lambda}{\partial x} = x \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

qui exprime que λ est une fonction de z et de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

il est donc possible de considérer λx et λy comme les dérivées partielles en x et en y d'une certaine fonction de z et de r.

On arrive ainsi à la conclusion suivante : *les composantes du vecteur cherché sont nécessairement de la forme*

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z} + \zeta(z, r);$$

V *est une fonction des trois variables* x, y, z; ζ *est une fonction de* z *et de* r. *Entre ces fonctions il n'existe qu'une seule relation exprimant que le vecteur est égal à un :*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \zeta\right)^2 = 1.$$

La fonction V n'est donc pas quelconque : elle est intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre obtenue en écrivant que l'une des deux racines de l'équation du second degré en ζ,

$$\zeta^2 + 2\frac{\partial V}{\partial z}\zeta + \Delta_1 V - 1 = 0,$$

est de la forme spécifiée, c'est-à-dire satisfait à l'équation du premier ordre

$$y\frac{\partial\zeta}{\partial x} - x\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0.$$

Les calculs sont d'ailleurs susceptibles d'une simplification, par suite de l'introduction de coordonnées cylindro-polaires : on écrit que l'une des racines de l'équation en ζ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \zeta\right)^2 = 1$$

satisfait à la condition

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = 0;$$

l'équation du second ordre est alors immédiatement écrite. A toute intégrale de cette équation correspond une (ou deux, plus particulièrement) fonction ζ de z et de r; on détermine ainsi un des complexes cherchés.

Il est préférable de ne pas utiliser cette équation du second ordre et de se donner la fonction ζ de z et de r. Les fonctions V correspondantes dépendent alors d'une équation remarquable qui est de la forme de celles que l'on rencontre en Mécanique. On remarque d'ailleurs que la variable θ se sépare des deux autres variables, ce qui permet de simplifier la recherche d'une intégrale complète; posons, en effet,

$$V = a\theta + W(z, r);$$

a désigne une constante arbitraire; quant à W, c'est la nouvelle fonction inconnue, qui ne contient que z et r; cette fonction W est définie par l'équation du premier ordre à deux variables seulement

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \zeta\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{r^2}.$$

Si, en particulier, ζ se réduit à une fonction de z seulement, cette dernière équation est à variables séparées. Soit

$$\zeta = \frac{d\zeta_1}{dz};$$

on a alors une intégrale

$$W = \int \sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}}\, dr + bz + \zeta_1 + c,$$

dont il est aisé d'obtenir une expression débarrassée de signe de quadrature; c, ζ_1 et ζ ne jouant finalement aucun rôle dans les équations du complexe, on peut les supposer identiquement nulles et poser

$$V = a\theta + bz + \int \sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}}\, dr;$$

le complexe correspondant est constitué par les parallèles aux génératrices d'un certain cône de révolution autour de Oz, et la distribution des rayons de ce complexe est définie par les formules

$$X = -\frac{ay}{r^2} + \frac{x}{r}\sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}},$$
$$Y = \frac{ax}{r^2} + \frac{y}{r}\sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}},$$
$$Z = b.$$

La surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe précédent est une surface développable enveloppée par les plans perpendiculaires aux génératrices d'un cône de révolution autour de Oz, en des points d'une courbe quelconque tracée sur ce cône.