NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 222-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__222_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une tige homogène* AB *de longueur* $2a$ *se meut dans un plan horizontal et tous ses éléments sont attirés proportionnellement à la masse et à la distance par un point fixe* O *de ce plan. L'extrémité* A *est assujettie à décrire un cercle fixe de centre* O *et de rayon* R *tracé dans le même plan.*

1° *Mouvement de la barre quand le point* A *peut décrire librement le cercle. Cas particulier du repos initial avec* $R = a$. *Construire la trajectoire du milieu de la barre dans ce cas.*

2° *Mouvement de la barre en supposant que* A *soit assujettie à décrire le cercle avec une vitesse angulaire constante* ω *donnée.*

Il n'y a pas de frottements.

ÉPREUVE PRATIQUE. — AOB *est une tige pesante homogène pliée en son milieu de façon à former l'angle* θ.

A l'instant initial, le plan AOB *est vertical, le point* O *est immobile et les deux points* A *et* B *ont des vitesses* α *et* β *perpendiculaires à ce plan.*

Le solide étant ainsi lancé, calculer sa force vive, une seconde après l'instant initial. (Juin 1910.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un gyroscope est constitué à l'aide d'un solide de révolution homogène pesant,* S, *dont l'axe* Δ *est supporté à l'aide d'une chape* C. *La chape* C *est un solide homogène pesant constitué par trois grands cercles identiques* C_1, C_2, C_3, *orthogonaux deux à deux et appartenant à une même sphère; l'axe* Δ *est l'intersection des plans des deux cercles* C_1 *et* C_2, *et le centre de gravité de la chape coïncide avec le centre de gravité du gyroscope.*

On imprime au solide S *une rotation initiale* ω *autour de son axe et par rapport à la chape; on pose le gyroscope sans autres vitesses initiales sur un plan horizontal fixe; le contact avec le plan est un point du cercle* C_3, *et ce cercle est maintenu dans un plan vertical par des appuis fixes.*

On accroche en un point du cercle C_3 *un poids* P. *Étudier le mouvement du gyroscope. Indiquer le sens du mouvement relativement au sens de la rotation* ω. *Examiner si l'on peut supprimer les appuis du cercle* C_3.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque pesante est abandonnée sans vitesses initiales sur un plan incliné sur lequel elle glisse sans frottement. A un instant quelconque on place sur la plaque une masse pesante* A, *sans vitesse relativement au plan incliné.*

1° *Le mouvement de la plaque sera-t-il altéré si l'on suppose que la masse* A *peut glisser sans frottement sur cette plaque?*

2° *On suppose la masse A liée à la plaque et l'on demande de calculer la perturbation produite dans le mouvement de la plaque.*

On suppose que la masse A soit infiniment petite par rapport à celle de la plaque et assimilable à un point matériel, et l'on se borne à calculer les parties principales des perturbations. (Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un cône* C, *homogène, pesant, de révolution, et dont le demi-angle au sommet est égal à* 45°, *est suspendu par son sommet à un point fixe.*

Le cône C *s'appuie sur un cône fixe identique de même sommet, d'axe vertical, et sur lequel il glisse et tourne sans frottement.*

1° *Déterminer le mouvement du cône* C, *les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Le cône* C *étant au repos, on accroche sur ce cône un poids* P, *assimilable à un point; trouver le mouvement que prend le cône* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un tube cylindrique, homogène, pesant, et de révolution, repose sur un plan horizontal qu'il touche tout le long d'une génératrice.*

On place à l'intérieur du tube, sans vitesse initiale, un poids P, *assimilable à un point, et dont la masse est égale à celle du tube. Le poids* P *est supposé placé dans une situation infiniment voisine de la génératrice de contact, et dans le plan perpendiculaire à cette génératrice mené par le centre de gravité du tube.*

Calculer approximativement le mouvement que prend le tube sur le plan horizontal et le mouvement du point P *dans le tube. On néglige l'épaisseur du tube et les frottements.* (Novembre 1910.)

Dijon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Équations de Lagrange. Équations canoniques d'Hamilton. Stabilité de l'équilibre. Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Liapounoff.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre circulaire homogène pesant est mobile autour des extrémités de son axe supposé vertical. Ce cylindre porte sur la surface extérieure un* *canal infiniment mince qui a la forme d'une hélice et cette hélice fait deux spires sur le cylindre. On abandonne sans vitesse à la partie supérieure du canal une bille pesante qui le parcourt et tombe. On demande la vitesse de rotation que possède alors le cylindre supposé primitivement immobile.*

Données :

Poids du cylindre................	1^{kg}
Hauteur du cylindre......	1^{m}
Rayon de base..................	$0^{m},30$
Poids de la bille.................	100^{g}
g..............................	$9^{m},81$

(Juillet 1910.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un cylindre circulaire droit homogène* S *est posé sur un plan* Π *parfaitement poli. Il est soumis à un système de forces données* D.

1° *Former par deux méthodes différentes les équations différentielles du mouvement de* S *lorsque* D *est quelconque.*

2° *Intégrer ces équations dans les deux cas particuliers suivants :*

a. D *est une force constante en grandeur, direction et sens, appliqué au centre* G *de* S;

b. D *est un couple dont le plan est parallèle à* Π *et dont le moment est une fonction connue de l'angle* ψ *que fait l'axe* Gz *du cylindre avec un axe* Oy *tracé dans le plan* Π.

3° *Exprimer que la section droite de* S *passant par le centre roule et pivote sans glisser sur le plan* Π. *Du résultat obtenu déduire les conditions auxquelles le dyname* D *doit satisfaire pour que l'absence de glissement supposée réalisée à l'instant initial persiste pendant tout le mouvement ultérieur.*

Notations : M, *masse du cylindre;*

$A = B$, C, *moments principaux d'inertie relatifs au centre* G;

ξ, η, R, *coordonnées de* G *par rapport à trois axes* $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, *les deux premiers étant situés dans* Π;

φ, *angle d'un rayon* Gy *du cylindre avec* $O\zeta$.

On donne D *par les projections* X, Y, Z *de sa résultante* *de translation sur* $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ *et par ses moments résultants suivants :* λ *par rapport à* $G\zeta$ *parallèle à* $O\zeta$ *mené par* G, ν *par rapport à* Gz *axe du cylindre*, μ *par rapport à la perpendiculaire commune à ces deux droites.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un plan vertical fixe, un point matériel pesant* M, *de masse* m, *est relié à un point fixe* O *par un fil élastique de masse négligeable. La tension du fil en* M *est supposée proportionnelle à l'excès* $r - l$ *de la longueur* r *du fil sur une longueur fixe* l; *la tension serait d'ailleurs* mk *pour un allongement* $r - l$ *égal à l'unité.*

1° *Déterminer la position d'équilibre.*

2° *Étudier les petites oscillations (au voisinage de cette position d'équilibre).*

3° *Étudier les petites oscillations lorsqu'aux forces précédentes s'ajoute une résistance opposée à la vitesse, proportionnelle à cette vitesse et égale à* $m\alpha$ *pour une vitesse égale à l'unité.*

On désigne par θ *l'angle que fait* OM *avec la verticale descendante.* (Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une circonférence homogène peut tourner sans frottement autour d'un de ses diamètres qui est vertical et fixe.*

Un point matériel pesant est mobile sans frottement sur la circonférence.

1° *Former les équations du mouvement du système, indiquer leur intégration, determiner la réaction exercée par la circonférence sur le point. On ne demande aucune discussion.*

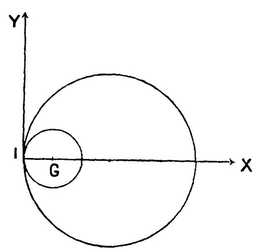
2° *On suppose en second lieu que la circonférence exerce sur le point une résistance opposée à la vitesse du point par rapport à la circonférence et proportionnelle à cette vitesse. Déterminer les équations du mouvement du système et les intégrer dans le cas où le point reste voisin de la position d'équilibre, sa vitesse étant petite.*

Paramètres : φ, *angle du plan de la circonférence d'un plan vertical fixe;* θ, *angle du rayon aboutissant au point eb de la verticale descendante.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cercle homogène de rayon* a, *de masse m, mobile dans un plan horizontal fixe, vient heurter intérieurement une circonférence fixe* C *de ce plan, de rayon* $R > a$, *sur laquelle il ne peut que rouler sans glisser Cette liaison est sans frottement et persiste après le choc.*

Trouver le mouvement suivant le choc, sachant qu'immédiatement avant le choc la vitesse du centre G *du cercle a pour projections* XY *sur le rayon* Ix *et sur la tangente* Iy *à la circonférence* C, *et que la vitesse angulaire de rotation du cercle est* ω.

On demande de trouver aussi la perte de force vive, la



percussion de réaction et la réaction exercée par C *sur le cercle dans le mouvement suivant le choc.*

Application numérique. — Le rayon R *est de* 1^{m}, *le rayon a de* 1^{dm}, *le poids du cercle de* 1^{kg}. *Immédiatement avant le choc, le cercle tourne autour de son centre, la vitesse correspondant à* 100 *tours par minute.*

(Novembre 1910.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Equations générales du mouvement d'un corps solide, rapportées à des axes mobiles d'une manière quelconque. On examinera successivement le cas où l'origine des axes mobiles est fixe dans le corps, et celui où elle ne l'est pas.*

II. *Appliquer les résultats précédents à la détermination du mouvement d'une sphère homogène pesante à surface parfaitement rugueuse, qui roule sans glisser sur une sphère fixe.*

III *Un cerceau circulaire de masse m est posé sur un sol horizontal, un point matériel de masse* $\sqrt{\frac{2}{3}}\,m$ *est fixé à l'extrémité d'un rayon horizontal et abandonné sans vitesse. Le coefficient de frottement du cerceau et du sol est* $f_0 = \frac{1}{2}$. *Le cerceau, initialement, roulera-t-il ou glissera-t-il sur le sol?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Expliquer la règle donnée par Halphen pour déterminer géométriquement les éléments du déplacement hélicoïdal équivalent à deux déplacements hélicoïdaux successifs donnes.*

Exécuter l'épure avec les données suivantes :

Pour le premier déplacement, l'axe A_1 *est une verticale ascendante, la rotation est de* 30° *et se fait de gauche à droite, la translation, descendante, est de* 6^{cm}.

Pour le deuxième déplacement, l'axe A_2 *est de front, montant vers la droite, incliné de* 45° *sur* A_1, *distant de* A_1 *de* 4^{cm}, *en avant; la rotation est de* 60° *et se fait de gauche à droite; la translation, ascendante, est de* 6^{cm}.

(*L'épure sera accompagnée d'une légende explicative.*)

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Calculer les expressions des composantes de l'accélération d'un point mobile dans l'espace suivant la tangente à la trajectoire et suivant le rayon vecteur allant du point à la projection orthogonale* Ω *d'une origine fixe* O *sur le plan osculateur à la trajectoire. Les mettre sous la forme*

$$\frac{rh^2}{p^3\rho} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2p^2}\left(\frac{dh^2}{ds} + \frac{h^2}{p\rho}\,\frac{dq^2}{ds}\right),$$

où ρ *est le rayon de courbure,* q *la distance* $O\Omega$, r *et* p *les distances de* Ω *au point mobile et à la tangente à la trajectoire,* h *le moment de la vitesse par rapport à* Ω *et* s *l'arc de la trajectoire.*

II. *Étudier le mouvement d'une toupie sur un plan horizontal parfaitement rugueux, dans les conditions initiales suivantes :*

$$\theta_0 = 60^\circ, \quad \theta'_0 = 0, \quad \varphi'_0 = 2\sqrt{\frac{Pl}{3A}}, \quad \Psi'_0 = \left(3\frac{A}{C} - 1\right)\sqrt{\frac{Pl}{3A}},$$

les composantes de la rotation instantanée étant

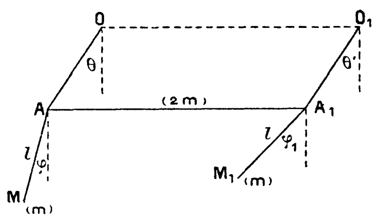
$$p = \theta' \sin \Psi - \varphi' \sin \theta \cos \Psi,$$
$$q = \theta' \cos \Psi + \varphi' \sin \theta \sin \Psi,$$
$$r = \Psi' + \varphi' \cos \theta;$$

P *est le poids*, l *la distance du centre de gravité à la pointe*, A *et* C *les moments équatorial et axial relatifs à la pointe.*

Après avoir déterminé θ *en fonction du temps, on fera le calcul explicite de* φ *et de* Ψ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une barre homogène* AA_1 *de masse* $2m$ *est suspendue par ses extrémités à deux fils sans masse de même longueur* l *attachés à deux points fixes* O *et* O_1; *ces deux points* O *et* O_1 *sont au même niveau et l'on a* $OO_1 = AA_1$. *En* A *et* A_1 *sont attachés deux pendules simples* AM *et* A_1M_1 *de même longueur* l *et de même masse* m. *L'ensemble est mobile dans un plan vertical.*

Rapporter les petits mouvements de l'ensemble au



système des coordonnées normales *et calculer les périodes des oscillations correspondant à ces coordonnées.*

Prendre $l = 10^{\text{m}}$, $g = 9,808 \text{ m : sec}^2$.

(Novembre 1910.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre* AB *homogène, pesante, infiniment mince, est fixée par son extrémité* A *en un point fixe autour duquel elle peut tourner librement. A son autre extrémité* B *est attaché un fil sans masse dont l'autre extrémité* C *est fixe. La droite* AC *des deux points fixes fait un angle quelconque* α *avec l'horizon.*

1° *En supposant* d'abord *le fil inextensible et de longueur* *fixe* R, *on demande de trouver le mouvement du système en le supposant placé à l'instant initial dans un plan quelconque* P *passant par* AC, *et lancé à partir de cette position avec une vitesse quelconque, de manière cependant que le fil soit et reste* d'abord *tendu. Discuter.*

2° *En supposant* en second lieu *le fil élastique, l'intensité de la tension du fil aura pour expression* $K^2(r-R)$, *dans laquelle* K^2 *est un coefficient constant de proportionnalité,* R *la longueur du fil non tendu, et* r *la valeur, à l'époque quelconque* t, *que prend cette longueur par suite de la tension à cette époque. On demande de reconnaître si l'équation de d'Alembert et les équations de Lagrange sont encore applicables sous leur forme ordinaire. Dire comment il faut les modifier, et* établir complètement *les équations qui remplacent celles de Lagrange dans ce nouveau cas.*

Épreuve pratique. — *Les côtés adjacents d'un quadrilatère plan et convexe* A_1B_1BA *sont égaux deux à deux et de longueur constante :* $A_1A = AB = c$; $A_1B_1 = B_1B = d$. *Les sommets* A_1 *et* B_1 *restent fixes. Lorsque les angles varient, le côté* AB *se déplace et entraîne dans son mouvement un plan mobile* P *qui glisse sur le plan* P_1 *du quadrilatère.*

1° *Trouver le lieu du centre instantané de rotation dans* P_1 *et dans* P.

2° *Ces deux lieux sont des limaçons de Pascal, ayant respectivement pour points doubles* A_1 *et* B. *Démontrer que si les tangentes au point double sont réelles pour l'un des limaçons, elles sont imaginaires pour l'autre.*

3° *Soit* C *un point du plan* P *invariablement lié à* AB *et soit* T *sa trajectoire sur* P_1. *On trace dans* P *le vecteur* CB' *équipollent à* BB_1 *et l'on construit les triangles* $C_1A_1B_1$ *et* CB'C' *semblables à* CAB *et semblablement orientés. Montrer que lorsque* C *décrit* T *la droite* B'C' *conserve une longueur constante et que ses extrémités se déplacent sur des cercles de même rayon, ayant pour centres les points* B_1 *et* C_1 *du plan fixe.*

4° *Trouver les roulettes du mouvement ainsi défini par le déplacement de* B'C'. (Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Étant donnée une hélice tracée sur* *un cylindre de révolution d'axe vertical pris pour axe* Oz *dirigé vers le haut, on considère la surface* S *engendrée par une* demi-*droite qui se meut de manière que son extrémité restant toujours sur* Oz *auquel elle est constamment perpendiculaire, elle s'appuie en même temps sur l'hélice. Cette surface étant supposée réalisée matériellement, on choisit les axes* Ox *et* Oy *fixes de sorte qu'une surface* Σ *identique à* S *mais fixe et coïncidant avec* S *à l'époque initiale* $t = 0$ *ait pour équations*

$$x = \rho \cos\alpha, \qquad y = \rho \sin\alpha, \qquad z = h\alpha,$$

où ρ *et* α *sont deux paramètres arbitraires, mais* ρ *restant positif ainsi que la constante* h.

Quant à S, *nous la supposons animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de* Oz *en sens contraire de celui des* α *croissants, la valeur* absolue *de la vitesse angulaire étant désignée par* ω. *Cela posé, un point matériel pesant* M *est astreint à se mouvoir sans frottement sur cette surface sur laquelle il est lancé, à* $t = 0$, *dans le sens des* α *croissants et de manière qu'on ait à ce moment*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega, \qquad \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

la position initiale étant donnée par $\alpha = 0$, $\rho = \rho_1 > 0$.

Intégrer autant qu'on le pourra et étudier le mouvement. On appliquera la theorie du mouvement d'un point sur une surface variable.

Épreuve pratique. — *Un point matériel est sollicité par une force variable* F, *parallèle à une direction fixe* D; *il est soumis, en outre, à une résistance* R *dirigée en sens contraire de la vitesse.*

Soit M *la position du point à un instant donné* t, *et soit* MN *la longueur de la corde du cercle de courbure de la trajectoire en* M *menée parallèlement à la direction* D.

1° *Montrer que la vitesse du point* M, *à l'instant* t, *est égale en grandeur à celle qu'il aurait si, partant du repos, il avait parcouru, dans le vide, un chemin égal au quart de* MN, *sous l'action d'une force constante, en grandeur et en direction, et égale à la valeur de* F *à l'instant* t.

2° *La trajectoire étant donnée par son équation* $y = \varphi(x)$, *on demande de déterminer la loi de variation de la résistance* R, *en supposant connue la loi* $F = f(x)$ *suivant laquelle varie la force* F. (Novembre 1910.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque rectangulaire et homogène* OABC *est mobile autour de sa diagonale* OC. *Le point* O *est fixe et la diagonale* OC *est assujettie à rester dans un plan horizontal.*

Étudier le mouvement de ce système.

A l'origine la droite OC *est immobile. la plaque est horizontale et elle tourne autour de* OC *avec une vitesse angulaire* ω_0. *La masse de la plaque est* M. *Le côté* OB *du rectangle est* 2, *le côté* OA *est* $2\sqrt{2}$.

On indique, et il est inutile de le vérifier, que l'ellipsoïde d'inertie de la plaque relativement au point O *est*

$$\frac{M}{9}\left[4x^2 + 32y^2 + 36z^2 - 2\sqrt{2}xy\right] = 1,$$

quand on prend pour axe des x *la diagonale* OC *et pour axe des* y *la perpendiculaire à* OC *menée dans le plan de la plaque du même côté que* OA *par rapport à* OC.

SOLUTION.

Soient trois axes fixes OXYZ dont OZ est vertical et trois axes mobiles dont Oz est normal à la plaque, Ox est suivant la diagonale OC et Oy dans le plan de la plaque.

Soit Ψ l'angle XOx et θ l'angle ZOz.

Le théorème des forces vives donne la relation

$$(1) \qquad 4\theta'^2 + (32 + 4\cos^2\theta)\Psi'^2 - 2\sqrt{2}\theta'\Psi'\sin\theta = 4\omega_0^2.$$

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe fixe OZ est constante et l'on a

$$(2) \qquad (32 + 4\cos^2\theta)\Psi' - \sqrt{2}\sin\theta.\theta' = 0.$$

De (1) et (2) on tire

$$= \omega_0 \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{8 + \cos^2\theta}{7 + \cos^2\theta}} \qquad \text{et} \qquad \Psi' = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sin\theta.\theta'}{8 + \cos^2\theta}.$$

Puisque θ' ne s'annule jamais, la plaque tourne toujours dans le même sens en allant du minimum ω_0 de θ' à son maximum $\omega_0\sqrt{\frac{64}{63}}$, de sorte que la vitesse de rotation autour de OC est presque constante. La durée de la révolution est comprise entre $\frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{63}{64}}$.

Ψ' changeant de signe avec θ, le mouvement de Ox est oscillatoire. On a $\Psi_1 = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{2}}{4}$ = environ 6°, pour l'amplitude. Le maximum de Ψ' (en valeur absolue) a lieu quand la plaque est verticale. Donc Ψ' varie entre o et $\frac{\omega_0}{3\sqrt{56}}$ et, par suite, la plaque tourne autour de OC d'un mouvement presque uniforme et OC oscille autour du point O sans que sa vitesse angulaire dépasse $\frac{\omega_0}{3\sqrt{56}}$ ou environ $\frac{1}{22}\omega_0$ et l'amplitude est d'environ 6°.

Épreuve pratique. — *En un point* O *d'un plan incliné on attache un fil élastique de masse négligeable à l'extrémité duquel on place un point pesant* P. *Construire graphiquement la vitesse et la trajectoire de ce point.*

Le plan fait avec l'horizon un angle dont le sinus est 0,2. *La longueur du fil à l'état naturel est de* 10^{cm}.

A l'origine du temps le point P *est sans vitesse, le fil est horizontal et il n'est pas tendu.*

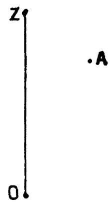
Le fil s'allonge proportionnellement à sa tension et il doublerait de longueur sous l'action d'une tension égale au poids du point P.

On fera deux dessins sur deux feuilles séparées avec des intervalles de temps égaux pour l'un à $\frac{1}{10}$ *de seconde et pour l'autre à* $\frac{1}{20}$. *On se bornera à une oscillation simple.*

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — *Un plan vertical* zOA *tourne autour de la verticale* Oz *avec une vitesse constante* ω. *Autour du point fixe* A, *et dans le plan* zOA, *peut tourner une plaque rectangulaire homogène dont le centre de gravité est en* A.

1° *Trouver les positions d'équilibre relatif de la plaque et examiner si elles sont stables ou instables.*



2° *Étudier le mouvement de la plaque en supposant qu'à l'origine des temps la plaque ait son grand côté horizontal et qu'elle ait, dans le plan* zOA, *une vitesse relative égale à*

$$\omega\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}},$$

en appelant a *et* b *les longueurs des côtés.*

SOLUTION.

Prenons pour Ax et Ay les axes de symétrie de la plaque et pour Ax_1 et Ay_1 des axes, l'un horizontal, l'autre vertical, dans le plan zOA. Nous aurons, pour un angle θ entre ces axes,

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta.$$

Aux forces réelles, ajoutons la force d'entraînement et la force centrifuge composée, toutes deux changées de signes. La dernière, normale au plan zOA, n'interviendra ni dans l'équilibre ni dans le mouvement. Soit d la distance de A à Oz. La force d'entraînement pour un point est $m\omega^2 d + m\omega^2 x_1$. Les forces $m\omega^2 d$ ont une résultante passant en A qui est fixe. Il suffit d'exprimer que la somme des moments des forces $m\omega^2 x_1$ par rapport à A est nulle. On obtient

$$-\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{M}\,\frac{a^2-b^2}{3} = 0.$$

Donc pour l'équilibre, il faut $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}\cdot$ Si l'on prend θ très petit et si l'on a $a > b$, le signe de la somme des moments montre que $\theta = 0$ correspond à la stabilité. De même $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'instabilité.

Pour étudier le mouvement, le théorème des forces vives donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} \cos\theta,$$

en tenant compte des conditions initiales. On voit que θ croît à partir de zéro et tend vers $\frac{\pi}{2}$ en mettant un temps infini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point de masse μ est soumis à l'action d'une force constante en grandeur, mais variable en direction. La grandeur de la force est égale à 144 dans le système C. G. S. La direction de la force varie uniformément et fait un tour par seconde. La vitesse initiale du point est nulle.*

Donner, pendant une seconde, par un graphique approximatif et sans aucun calcul, la représentation de l'hodographe et celle de la trajectoire du point en prenant des intervalles de temps égaux à $\frac{1}{12}$ de seconde.

On expliquera le dessin dans une copie.

(Octobre 1910.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *La base inférieure d'un cylindre de révolution, homogène et pesant, peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal fixe. Le rayon de base et la hauteur du cylindre sont égaux à 1^m. Sur la surface latérale du cylindre est fixé un tube creux, de section infiniment petite, dans l'intérieur duquel peut glisser sans frottement un point* M *ayant même poids que le cylindre. Le tube a la forme d'un arc d'hélice ayant pour origine un point* A *de la base inférieure du cylindre, et pour extrémité un point* B *de la base supérieure ; les méridiens du cylindre qui passent par* A *et* B *sont rectangulaires; un mobile qui décrirait l'arc* AB, *en se dirigeant de* A *vers* B, *tournerait dans le sens direct autour de la verticale ascendante dirigée suivant l'axe du cylindre.*

Le cylindre étant au repos, le point M *est abandonné sans vitesse en* B, *dans le tube.*

1° *Calculer le temps que mettra le point* M *pour arriver en* A.

2° *Déterminer le déplacement du cylindre pendant le même temps.*

ÉPREUVE PRATIQUE (Mécanique). — *Une plaque de fer infiniment mince et homogène a la forme d'un segment de cercle. Le rayon du cercle et la corde du segment sont égaux à* 1^m. *La densité du fer est* 7,6

Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport au centre du cercle. (Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque circulaire infiniment mince, homogène et pesante, est invariablement liée à une tige rectiligne dépourvue de masse, qui est perpendiculaire à son plan et passe par son centre. Le solide ainsi constitué est mobile autour d'un point fixe situé sur la tige.*

1° *Établir les équations du mouvement, les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Étudier le mouvement dans le cas particulier où, à l'époque initiale, la tige est immobile, tandis que le solide tourne autour de cette tige avec une vitesse angulaire donnée* ω.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une barre rectiligne, homogene et pesante, faisant avec l'horizon l'angle* θ, *est abandonnée sans vitesses initiales dans un plan vertical fixe. Lorsque l'extrémité inférieure de la barre vient choquer un plan horizontal fixe, le centre de gravité est animé de la vitesse* v. *La barre et le plan horizontal sont parfaitement élastiques.*

Quelle valeur faut-il donner à l'angle θ *pour que la valeur de la vitesse angulaire de la barre immédiatement après le choc soit maximum?*

Quel est, lorsque θ *a cette valeur, le mouvement initial de la barre après le choc?* (Novembre 1910.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un disque circulaire homogène posé sur un plan incliné* P *descend le long d'une ligne de plus grande pente de ce plan sous l'influence de son poids.*

On suppose que le plan est assez rugueux pour empêcher tout glissement du disque. Le roulement du disque s'effectuant dans un plan vertical, montrer que l'accélération de son centre est égal aux $\frac{2}{3}$ de l'accélération que prendrait un point matériel glissant sans frottement *le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan parallèle au plan* P.

On négligera le frottement de roulement.

II. *La partie supérieure d'une courroie sans fin flexible, inextensible et d'épaisseur négligeable, repose sur un cylindre de révolution à axe horizontal, tandis que l'autre partie pend librement. On suppose la courroie en équilibre dans un plan vertical perpendiculaire à l'axe du cylindre et l'on donne le rayon* R *du cylindre ainsi que l'angle* φ *de la verticale avec le rayon du cylindre qui aboutit à l'un des points* A, B *où la courroie entre en contact avec le cylindre.*

On demande de calculer :

1° *La longueur de la courroie;*

2° *La distance* OD *de l'axe du cylindre au point le plus bas* D *de la courroie.*

Épreuve pratique. — *Une tige homogène cylindrique pesante de masse* m *et de longueur* $2a$ *effectue de petites oscillations autour de son extrémité* A. *Soit* T *la durée d'une oscillation double.*

On soude à l'autre extrémité B *et de façon que les axes coïncident une autre tige homogène pesante de masse* m' *et de longueur* $2b$. *Soit* T' *la durée d'une oscillation double du pendule ainsi constitué.*

Calculer le rapport $\dfrac{T'-T}{T}$ *de l'accroissement de la période à la période primitive.*

En donner une explication simplifiée quand m' *est petit par rapport à* m.

Faire le calcul et se rendre compte de l'approximation obtenue quand

$$m = 500^{g}; \qquad m' = 10^{g};$$
$$2a = 100^{cm}; \qquad 2b = 20^{cm}.$$

(Juillet 1910.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équilibre et mouvement relatifs à la surface de la Terre.*

II. *Une barre horizontale* AB *tourne uniformément autour de la verticale* Az *du point* A *avec une vitesse angulaire* ω. *Une seconde barre* BC, *homogène et pesante est articulée en* B *avec la première. Étudier sommairement le mouvement relatif de cette seconde barre, qui reste constamment dans le plan* BAz. *On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Déterminer les positions d'équilibre relatif en distinguant l'équilibre stable de l'équilibre instable. Étudier les mouvements infiniment petits dans les différentes hypothèses. Calculer la réaction en* B.

La densité linéaire de la barre BC *est égale à l'unité.*

On posera $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{BC} = b$, *et l'on désignera par* θ *l'angle de* BC *avec la verticale descendante.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un disque circulaire vertical non homogène est assujetti à rouler sans glisser sur une horizontale. Déterminer la durée des petites oscillations du disque dans le voisinage de la position d'équilibre stable.* (Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équilibre d'un milieu continu déformable. Répartition des efforts. Équations générales de l'équilibre.*

II. *On considère une chaîne pesante, homogène, parfaitement flexible, de grosseur négligeable. Cette chaîne est disposée sur une table horizontale de façon qu'une partie* AB *pende verticalement et que la partie horizontale* BC *soit rectiligne et perpendiculaire au bord de la table. Cette partie horizontale glissant sur la table éprouve un frottement proportionnel à la pression normale.*

1° *Établir les conditions d'équilibre.*

2° *Étudier le mouvement quand il a lieu, en supposant que la partie horizontale glisse dans sa direction et que la portion pendante reste verticale.*

3° *Calculer dans le cas du mouvement comme dans celui de l'equilibre la tension de la chaîne en chacun de ses points.*

Nota. — *En* B *le profil du bord de la table est arrondi suivant un quart de cercle de rayon très petit. On supposera d'abord le frottement nul sur la portion arrondie, et l'on examinera ensuite les modifications à introduire dans les formules pour le cas où le coefficient de frottement sur cette portion serait le même que sur la partie horizontale de la table.*

Epreuve pratique. — *Moment d'inertie de la section droite d'une poutrelle en acier en* I *par rapport à l'axe perpendiculaire à la lame, passant par le centre de gravité.*

Dimensions en millimètres $\dfrac{136 \times 254}{15 \times 12}$.

Le moment d'inertie sera exprimé en centimètres carrés.

(Novembre 1910.)