TURRIÈRE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1910). Composition sur le calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 21-39

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__21_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1910).

COMPOSITION SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL [1].

SOLUTION PAR M. TURRIÈRE.

On considère la famille de quadriques (Q)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{const.},$$

a, b, c étant des nombres distincts donnés [2], les axes coordonnés étant rectangulaires. Les courbes (γ) trajectoires orthogonales de ces quadriques sont les intégrales du système

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{dz}{cz},$$

et leurs équations sont

$$x = x_0 t^a, \qquad y = y_0 t^b, \qquad z = z_0 t^c,$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes et t étant un paramètre; pour simplifier les calculs, je poserai $t = e^u$ et prendrai pour équations des courbes (γ) :

$$(\gamma) \qquad x = x_0 e^{au}, \qquad y = y_0 e^{bu}, \qquad z = z_0 e^{cu}.$$

---

[1] *Voir* l'énoncé page 403 des *Nouvelles Annales* de 1910.

[2] Sauf avis contraire, je ne fais aucune restriction relativement aux signes de a, b, c.

Les surfaces (S) trajectoires orthogonales des quadriques (Q) sont intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$(\mathrm{E}) \qquad axp + byq = cz;$$

les caractéristiques de cette équation sont les courbes (γ).

Pour définir l'intégrale générale (S), il suffit de se donner une courbe distincte d'une caractéristique

$$x = x_0(v), \qquad y = y_0(v), \qquad z = z_0(v),$$

et de résoudre le problème de Cauchy pour cette courbe imposée; on est ainsi conduit aux équations paramétriques suivantes de l'intégrale générale (S) :

$$x = x_0(v)e^{au}, \qquad y = y_0(v)e^{bu}, \qquad z = z_0(v)e^{cu};$$

la courbe imposée est la courbe $u = 0$; les caractéristiques sont les courbes coordonnées $v = \text{const.}$

Il résulte de ces équations que *l'équation générale des surfaces* (S) *s'obtient en égalant à zéro une fonction homogène quelconque de* $x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}, z^{\frac{1}{c}}$ (1).

Comme exemples remarquables, je citerai des surfaces d'équation

$$Ax^{\frac{m}{a}} + By^{\frac{m}{b}} - Cz^{\frac{m}{c}} = 0,$$

A, B, C, m étant des constantes quelconques. Plus particulièrement encore, pour $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, on obtient trois familles de cylindres.

---

(1) Dans toutes les questions concernant les trajectoires orthogonales de surfaces, il y a lieu de chercher s'il existe un système triple-orthogonal constitué par ces surfaces et deux familles de surfaces trajectoires, et il y a le plus grand intérêt à mettre ce système en évidence. Dans le cas actuel de quadriques (Q) concentriques et homothétiques, il n'existe pas de tel système, conformément d'ailleurs au théorème de M. Maurice Lévy.

Comme autre exemple, je citerai les surfaces

$$x^{\frac{\alpha}{a}} y^{\frac{\beta}{b}} z^{\frac{\gamma}{c}} = \text{const.},$$

α, β, γ étant trois constantes assujetties à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Ces surfaces rentrent dans le type des surfaces

$$x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = \text{const.},$$

qui furent étudiées par Lie et par Klein. Pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, on a trois familles de cylindres identiques aux précédentes.

I. Nous avons trouvé les équations

$$(\mathrm{S}) \qquad x = x_0 e^{au}, \qquad y = y_0 e^{bu}, \qquad z = z_0 e^{cu},$$

pour représenter les surfaces (S) : x_0, y_0, z_0 sont trois fonctions arbitraires d'un paramètre v. Ce sont bien là des expressions de la forme spécifiée dans l'énoncé.

Déterminons les asymptotiques de cette surface (S). Les déterminants D, D′, D″ de Gauss (notations de M. Darboux) ont pour expressions

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 e^{(a+b+c)u}, \qquad \mathrm{D}' = \mathrm{D}'_1 e^{(a+b+c)u}, \qquad \mathrm{D}'' = \mathrm{D}''_1 e^{(a+b+c)u},$$

en désignant par D_1, D'_1, D''_1 trois fonctions de v seul :

$$\mathrm{D}_1 = \begin{vmatrix} a^2 x_0 & b^2 y_0 & c^2 z_0 \\ a x_0 & b y_0 & c z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \Sigma bc(b-c) x'_0 y_0 z_0,$$

$$\mathrm{D}'_1 = \begin{vmatrix} a x'_0 & b y'_0 & c z'_0 \\ a x_0 & b y_0 & c z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \Sigma a(c-b) x_0 y'_0 z'_0,$$

$$\mathrm{D}''_1 = \begin{vmatrix} x''_0 & y''_0 & z''_0 \\ a x_0 & b y_0 & c z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \Sigma x''_0 (b y_0 z'_0 - c z_0 y'_0);$$

$x'_0, y'_0, z'_0, x''_0, y''_0, z''_0$ désignent les dérivées des trois fonctions x_0, y_0, z_0 de la variable v.

De la circonstance remarquable que D, D′, D″ sont proportionnels à trois fonctions de v seul, il résulte que les asymptotiques sont déterminables par quadratures. Leur équation différentielle étant

$$D_1\,du^2 + 2D'_1\,du\,dv + D''_1\,dv^2 = 0,$$

les deux familles d'asymptotiques sont représentées par l'équation

$$u + \int \frac{D'_1}{D_1}\,dv + \varepsilon \int \frac{\sqrt{D'^2_1 - D_1 D''_1}}{D_1}\,dv = \text{const.},$$

où l'on fait successivement $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$. L'ensemble des asymptotiques dépend donc de deux quadratures.

Ce résultat de pur calcul tient à une propriété projective de toute surface (S) d'être invariante dans la transformation homographique particulière

$$x = \rho^a X, \qquad y = \rho^b Y, \qquad z = \rho^c Z,$$

dépendant du paramètre ρ (¹).

II. Pour que la courbe imposée $u = 0$ soit asymptotique de (S), il faut et il suffit que D″ et, par conséquent, D''_1 soient nuls.

Par le fait que la courbe imposée est asymptotique, toutes les courbes $u =$ const. sont des asymptotiques.

(¹) On remarquera l'analogie d'équation et de génération des surfaces (S) et des cônes ayant l'origine des coordonnées pour sommet; la transformation homographique précédente est analogue à l'homothétie ayant ce point pour pôle.

La condition trouvée exprime que la courbe imposée jouit de la propriété géométrique suivante : En tout point M de cette courbe, le rayon vecteur OM et la binormale sont conjugués en direction par rapport à toute quadrique (Q).

Cette relation est une sorte d'équation de Monge-Pfaff du second ordre ; sur une surface quelconque de l'espace, elle se réduit à une équation différentielle du second ordre; par suite, sur toute surface, il y a au moins une intégrale de cette équation, distincte d'une caractéristique de (E). On ne diminue donc pas la généralité du problème de Cauchy, en le résolvant pour la courbe intégrale générale de cette relation $D''_1 = 0$; en d'autres termes, si l'on résout le problème de Cauchy pour la courbe la plus générale qui satisfait à cette relation, on aura l'intégrale générale (S) de (E). On connaîtra alors une famille d'asymptotiques

$$u = \text{const.};$$

l'autre famille sera définie par une équation réductible à une quadrature

$$du = -2\frac{D'_1}{D_1}\,dv.$$

Or, pour trouver toutes les courbes qui satisfont à la relation $D''_1 = 0$, il suffit de considérer une solution de chacune des trois équations différentielles linéaires du second ordre :

$$x''_0 = Lx'_0 + Max_0,$$
$$y''_0 = Ly'_0 + Mby_0,$$
$$z''_0 = Lz'_0 + Mcz_0,$$

dans lesquelles L et M sont deux fonctions arbitraires de v : si x_0, y_0, z_0 sont trois solutions, la courbe, lieu du point (x_0, y_0, z_0) lorsque v varie, est une courbe pour laquelle D''_1 est nul.

Considérons l'une de ces trois équations analogues; soit

$$x''_0 = \mathrm{L}x'_0 + \mathrm{M}\,a\,x_0;$$

en posant (α étant une constante arbitraire)

$$x_0 = \alpha e^{a\int \mathrm{V}_1 dv},$$

cette équation homogène se transforme en une équation de Riccati

$$\mathrm{V}'_1 = \mathrm{M} + \mathrm{L}\mathrm{V}_1 - a\mathrm{V}_1^2.$$

Une telle équation n'est pas intégrable, en général, mais on peut profiter du fait que L et M sont deux fonctions arbitraires de v pour se donner *a priori* deux intégrales de cette équation de Riccati : l'intégrale générale s'obtient alors par une quadrature.

Passons maintenant à l'étude de l'enveloppe des asymptotiques. Considérons une surface (S) et une asymptotique distincte d'une caractéristique de l'équation (E) : imposons cette asymptotique comme courbe $u =$ const.; toutes les courbes $u =$ const. sont alors des asymptotiques d'une même famille. En excluant des surfaces particulières sur lesquelles nous reviendrons au 3°, les asymptotiques d'une famille peuvent donc être représentées par l'équation $u =$ const. : ce sont les courbes

$$x = x_0(v)e^{au}, \qquad y = y_0(v)e^{bu}, \qquad z = z_0(v)e^{cu},$$

correspondant aux diverses valeurs de u. Supposons que ces courbes aient une enveloppe; cette enveloppe sera une courbe d'équations

$$x = \varphi(u), \qquad y = \chi(u), \qquad z = \psi(u);$$

il doit exister une fonction v de u rendant compatibles

les équations

$$x_0(v)e^{au} = \varphi(u), \qquad y_0(v)e^{bu} = \chi(u), \qquad z_0(v)e^{cu} = \psi(u),$$
$$x'_0 \frac{dv}{du} = \varphi'(u)e^{-au} - a\varphi(u)e^{-au}, \qquad \ldots, \qquad \ldots;$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{d\varphi}{a\varphi} = \frac{d\chi}{b\chi} = \frac{d\psi}{c\psi},$$

c'est-à-dire que l'enveloppe, si elle existe, est une caractéristique de l'équation (E). Soit $v = v_0$ l'équation de cette caractéristique ; pour $v = v_0$ on a alors

$$\frac{x'_0}{ax_0} = \frac{y'_0}{by_0} = \frac{z'_0}{cz_0},$$

et réciproquement.

La condition nécessaire et suffisante d'existence de l'enveloppe de la famille $u =$ const. *d'asymptotiques est donc que les équations en* v

$$\frac{x'_0}{ax_0} = \frac{y'_0}{by_0} = \frac{z'_0}{cz_0}$$

soient compatibles pour une certaine valeur v_0 *de* v; *l'enveloppe est la caractéristique* $v = v_0$.

Cette condition exprime que la *courbe imposée est tangente à une caractéristique particulière;* ou encore, ce qui revient au même, *que la courbe imposée est normale à une quadrique* (Q) *particulière.*

Proposons-nous maintenant de déterminer toutes les surfaces (S) dont une famille d'asymptotiques est douée d'enveloppe ; observons que la condition

$$\frac{x'_0}{ax_0} = \frac{y'_0}{by_0} = \frac{z'_0}{cz_0}$$

devient

$$V_1 = V_2 = V_3,$$

en posant, comme précédemment,

$$x_0 = \alpha e^{a\int V_1 dv}, \qquad y_0 = \beta e^{b\int V_2 dv}, \qquad z_0 = \gamma e^{c\int V_3 dv},$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires, et V_1, V_2, V_3 trois fonctions de V.

On considérera donc les trois équations de Riccati suivantes :

$$\begin{aligned} V'_1 &= M + LV_1 - aV_1^2, \\ V'_2 &= M + LV_2 - bV_2^2, \\ V'_3 &= M + LV_3 - cV_3^2, \end{aligned}$$

L et M étant deux fonctions arbitraires de v ; on se donnera deux nombres quelconques v_0 et V_0, et l'on considérera la solution de chacune de ces trois équations qui se réduit à V_0 pour $v = v_0$. Les trois fonctions V_1, V_2, V_3 ainsi obtenues conviennent à la surface générale cherchée.

On aura des exemples simples en particularisant les fonctions L et M, en prenant L et M constants, par exemple.

Exemple I. — Parmi les surfaces (S), il en est qui sont réglées : elles sont représentées par les équations

$$x = (\alpha v + \alpha_0)e^{au}, \qquad y = (\beta v - \beta_0)e^{bu}, \qquad z = (\gamma v + \gamma_0)e^{cu};$$

leurs asymptotiques sont les courbes $u =$ const., et les courbes

$$u = -2\Sigma a(c-b)\beta\gamma\alpha_0 \int \frac{dv}{R(v)},$$

où $R(v)$ est un polynome du second degré en v

$$\begin{aligned} R(v) = &-\alpha\beta\gamma(a-b)(b-c)(c-a)v^2 \\ &+ v\Sigma bc(b-c)\alpha(\beta\gamma_0 + \gamma\beta_0) + \Sigma bc(b-c)\alpha\beta_0\gamma_0. \end{aligned}$$

Pour un choix convenable des constantes, si l'expression

$$\Sigma a(c-b)\beta\gamma\alpha_0$$

est nulle, les deux familles d'asymptotiques sont confondues suivant les génératrices rectilignes $u = \text{const.}$, les surfaces (S) correspondantes sont développables. C'est le résultat que l'on obtient en appliquant ce qui précède au cas $L = 0$, $M = 0$; on trouve ainsi les surfaces développables

$$\begin{aligned} x &= \alpha(av+1)t^a, \\ y &= \beta(bv+1)t^b, \\ z &+ \gamma(cv+1)t^c; \end{aligned}$$

l'arête de rebroussement est la courbe $v = 0$.

Exemple II. — Comme second exemple, je prendrai L nul et M constant; en supposant a, b, c tous trois positifs, si l'on pose

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha(\operatorname{ch}\sqrt{a}v + \sqrt{a}\operatorname{sh}\sqrt{a}v), \\ y_0 &= \beta(\operatorname{ch}\sqrt{b}v + \sqrt{b}\operatorname{sh}\sqrt{b}v), \\ z_0 &= \gamma(\operatorname{ch}\sqrt{c}v + \sqrt{c}\operatorname{sh}\sqrt{c}v), \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha(\cos\sqrt{a}v + \sqrt{a}\sin\sqrt{a}v), \\ y_0 &= \beta(\cos\sqrt{b}v + \sqrt{b}\sin\sqrt{b}v), \\ z_0 &= \gamma(\cos\sqrt{c}v + \sqrt{c}\sin\sqrt{c}v), \end{aligned}$$

on obtient des surfaces (S) pour lesquelles les asymptotiques $u = \text{const.}$ ont pour enveloppe la caractéristique $v = 0$. Lorsque $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sont proportionnels à des nombres rationnels, les surfaces obtenues sont unicursales, ainsi que les courbes coordonnées (u) et (v).

Examinons maintenant les particularités d'une surface (S) au voisinage de l'enveloppe d'une famille d'asymptotiques. Tout ce que l'on peut dire des surfaces (S) est une conséquence des propriétés générales de l'enveloppe d'une famille d'asymptotiques d'une surface quelconque. On sait que la seconde famille d'asymptotiques a la même enveloppe, qu'en un point de contact les directions asymptotiques sont confondues, qu'en un tel point l'indicatrice se décompose en deux droites parallèles. La courbure totale de la surface le long de l'enveloppe est nulle, ainsi que la torsion des asymptotiques ; le plan osculateur de l'asymptotique au point de contact a un contact d'ordre supérieur avec la courbe.

III. Nous avons implicitement supposé plus haut que la famille d'asymptotiques $u = \text{const.}$ n'était pas constituée par les caractéristiques de l'équation (E). Étant donnée l'équation

$$f(p, q, x, y, z) = axp + byq - cz = 0,$$

la condition donnée par Lie pour que les caractéristiques soient asymptotiques de toute intégrale n'est pas satisfaite, car on a

$$\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) = a^2xp + b^2yq - c^2z = 0;$$

ce ne sera donc que sur des surfaces (S) particulières que les caractéristiques seront des asymptotiques ; ces surfaces seront les intégrales communes aux deux équations linéaires

$$\begin{aligned} axp + byq - cz &= 0, \\ a^2xp + b^2yq - c^2z &= 0; \end{aligned}$$

elles seront donc orthogonales non seulement aux quadriques (Q), *mais encore aux quadriques*

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{const.}$$

Telle est la définition géométrique demandée des surfaces que nous allons étudier (¹) : on observera combien puissante est la méthode de Lie puisqu'elle permet de déterminer et de définir ces surfaces sans connaître l'intégrale générale de l'équation (E).

Reprenons maintenant la même question sous un autre point de vue. Les caractéristiques $v =$ const. devant être des asymptotiques, le déterminant D_1 doit être nul. On obtiendra donc les surfaces cherchées en choisissant pour courbe de Cauchy une intégrale quelconque de l'équation de Pfaff (²)

$$bc(b-c)x'_0 y_0 z_0 + ca(c-a)y'_0 z_0 x_0 + ab(a-b)z'_0 x_0 y_0 = 0,$$

(¹) Comme autres proprietes geometriques des surfaces

$$x^{bc(b-c)} y^{ca(c-a)} z^{ab(a-b)} = \text{const},$$

on peut signaler celles qui ont ete donnees par Lie et par Klein. On peut encore considerer les surfaces

$$x^\lambda y^\mu z^\nu = \text{const}.$$

comme se transformant en des plans par la *logarithmische Abbildung* de Sophus Lie, cette transformation curieuse qui lui a permis de deduire de tout plan une surface qui est de translation d'une infinite de facons

(²) A cause de ce qui a ete dit au debut du 2° et de ce qui va etre dit au debut du 4°, une remarque s'impose pour expliquer comment en prenant une integrale generale de l'equation de Pfaff ci-dessus considérée et en resolvant le probleme de Cauchy pour cette courbe, on n'obtient pas l'integrale generale de l equation (E) Etant donnée une surface quelconque, sur cette surface, l'equation de Pfaff devient uue equation différentielle de premier ordre, si la surface est la surface integrale de l'équation (E) (exception etant faite pour les surfaces $x^{bc(b-c)} y^{ca(c-a)} z^{ab(a-b)} =$ const) cette equation differentielle définit precisement les caracteristiques qui engendrent l'integrale consideree Il n'existe donc pas sur l'integrale generale de (E), sauf exception, d'intégrale de l'equation de Pfaff qui soit distincte d'une caracteristique celle-ci s'écrit

$$\frac{d}{dv}\left(x_0^{bc(b-c)}\,y_0^{ca(c-a)}\,z_0^{ab(a-b)}\right) = 0;$$

l'ensemble des intégrales de l'équation de Pfaff est donc constituée par les courbes tracées sur les surfaces

$$x_0^{bc(b-c)}\,y_0^{ca(c-a)}\,z_0^{ab(a-b)} = \text{const.}$$

On se donne donc une telle courbe distincte d'une caractéristique et l'on doit résoudre pour cette courbe le problème de Cauchy. Or, d'après ce qui a été dit au début du problème, les surfaces précédentes sont des intégrales (S) particulières : les surfaces cherchées ne sont donc autres que les surfaces

$$x^{bc(b-c)}\,y^{ca(c-a)}\,z^{ab(a-b)} = \text{const.};$$

on vérifie immédiatement qu'elles sont trajectoires orthogonales des quadriques

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{const.}$$

On peut prendre pour équations paramétriques de ces surfaces

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, t^a\, \theta^{a^2}, \\ y &= \beta\, t^b\, \theta^{b^2}, \\ z &= \gamma\, t^c\, \theta^{c^2}, \end{aligned}$$

ou les équations équivalentes :

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, e^{au+a^2v}, \\ y &= \beta\, e^{bu+b^2v}, \\ z &= \gamma\, e^{cu+c^2v}; \end{aligned}$$

pour une telle surface, rapportée aux courbes (u) et (v), on a

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ D' &= abc(a-b)(b-c)(c-a)xyz, \\ D'' &= abc(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)xyz, \end{aligned}$$

et les asymptotiques [1] sont donc les courbes

$$v = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad 2u + (a+b+c)v = \text{const.}$$

N'ayant fait aucune hypothèse de signes sur a, b, c, je peux, en particulier, considérer le cas $a+b+c=0$: *dans le cas de quadriques* (Q) *équilatères, les asymptotiques de la surface considérée sont donc les courbes coordonnées* $u=$ const. *et* $v=$ const.; on observera que, *dans ce même cas, ces surfaces* (S) *particulières sont orthogonales non seulement aux quadriques* (Q) *et aux quadriques d'équation :*

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{const.},$$

mais encore aux quadriques d'équation :

$$a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2 = \text{const.}$$

IV. En général, les courbes coordonnées ne sont pas conjuguées sur la surface (S) [2]. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que D′ soit nul, c'est-à-dire que la courbe imposée soit intégrale de l'équation de Monge

$$a(b-c)x_0y'_0z'_0 + b(c-a)y_0z'_0x'_0 + c(a-b)z_0x'_0y'_0 = 0;$$

---

(1) Il y a lieu d'examiner si les asymptotiques $v=$ const. admettent ou non une enveloppe : ce serait là un exemple d'enveloppe d'autant plus remarquable que cette enveloppe serait courbe intégrale de l'équation (E). On s'assure aisément que cette enveloppe n'existe pas.

(2) Les surfaces d'équations :

$$x = f(v) \times f_1(u),$$
$$y = \varphi(v) \times \varphi_1(u),$$
$$z = \psi(v) \times \psi_1(u),$$

telles que les courbes coordonnées sont conjuguées, ont donné lieu à divers Mémoires de Péterson, M. Jamet, Lie et Raffy.

on reconnaît l'équation de Monge que Lie associe au complexe tétraédral constitué par les normales aux quadriques (Q). *La condition pour que les courbes coordonnées soient conjuguées sur la surface* (S) *est que la courbe de Cauchy soit une courbe de ce complexe tétraédral.* S'il en est ainsi, toutes les courbes $u =$ const. sont des courbes de ce même complexe.

Sur une surface (S) intégrale générale de (E), cette équation de Monge se réduit à une équation différentielle distincte de l'équation différentielle des caractéristiques situées sur cette surface. Il en résulte que, sans diminuer la généralité du problème de Cauchy, on peut choisir la courbe imposée parmi les courbes déterminées par Lie et dont les tangentes appartiennent au complexe tétraédral. La surface (S) sera alors rapportée à un système conjugué, les courbes $v =$ const. étant les caractéristiques de (E).

Considérons alors une surface quelconque (S_1) rapportée à un système conjugué (u) (v) et qui n'est pas nécessairement une surface (S) particulière. Réalisons la déformation [1] de (S_1) qui consiste à faire correspondre à tout point M de (S_1) le point M' où la tangente à la courbe $u =$ const. qui passe par M touche l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à (S_1) le long de la courbe $v =$ const. qui passe par M. Les coordonnées de M étant x, y, z, celles de M' seront

$$X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial v},$$

où λ est une certaine fonction de u et de v; x, y, z sont

---

[1] Il s'agit bien entendu d'une correspondance entre points des deux surfaces (S_1) et (Σ_1) et non d'une déformation avec conservation de l'élément linéaire.

trois solutions d'une même équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{A}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial \theta}{\partial v};$$

on a donc

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} = (1 + \mathrm{A}\lambda)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\mathrm{B}\lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} = \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u\, \partial v} = {} & \left[\mathrm{A}(1 + \mathrm{A}\lambda) + \frac{\partial}{\partial v}(1 + \mathrm{A}\lambda)\right]\frac{\partial x}{\partial u} \\ & + \left[\mathrm{B}(1 + \mathrm{A}\lambda) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{B}\lambda) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\right]\frac{\partial x}{\partial v} \\ & + \left(\mathrm{B}\lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

En se reportant alors à la démonstration du théorème de Dupin sur les systèmes conjugués, on voit que le λ du point M′ est précisément égal à $-\frac{1}{\mathrm{A}}$; $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u\, \partial v}$ se trouvent être des fonctions linéaires de $\frac{\partial x}{\partial v}$ et de $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ seulement, et il existe, par conséquent, une relation linéaire entre $\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}$, cette relation étant vérifiée par les dérivées de Y et par celles de Z; les courbes u et v sont donc conjuguées sur la surface (Σ_0) lieu du point M′.

Cette propriété générale n'est autre que celle bien connue qui concerne les congruences de droites, leurs développables et leurs surfaces focales.

V. Les formules précédentes, dans lesquelles on ne suppose plus λ égal à $-\frac{1}{\mathrm{A}}$, permettent d'obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial B}{\partial v}$$
$$- \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}(A\lambda+1) - \left(B\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \operatorname{Log}(A\lambda+1)}{\partial v} = 0,$$

qui résout la question pour une surface quelconque rapportée à un système conjugué.

Proposons-nous de déterminer les intégrales de cette équation qui sont uniquement fonction de la variable v, en supposant que A et B sont deux fonctions de v : pour une surface (S) intégrale de l'équation (E), on a, en effet,

$$a x'_0 = A a x_0 + B x'_0, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

A et B étant des fonctions de v seul. En prenant $B = -v$, ce que l'on peut toujours supposer si B est distinct de zéro, on obtient précisément les équations des courbes du complexe tétraédral que forme Lie ; mais je ne ferai aucune hypothèse sur la forme des fonctions A et B de v. En prenant pour fonction λ une fonction de v seulement, on fait correspondre à la surface (S_1) une surface (Σ_1) de même nature

$$X = e^{au}(x_0 + \lambda x'_0),$$
$$Y = e^{bu}(y_0 + \lambda y'_0),$$
$$Z = e^{cu}(z_0 + \lambda z'_0);$$

cette surface (Σ_1) est la surface intégrale de (E) qui passe par la courbe imposée

$$x = x_0 + \lambda x'_0, \qquad y = y_0 + \lambda y'_0, \qquad z = z_0 + \lambda z'_0;$$

celle-ci s'obtient à partir de la courbe imposée pour (S_1), en portant un certain segment fonction de v sur les tangentes à cette courbe. La question proposée revient à chercher s'il est possible de déterminer λ par la condition que les deux courbes imposées soient des courbes du complexe tétraédral.

On peut donc déterminer les déformations considérées de deux manières. En partant de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, on obtient une équation différentielle entre $\frac{d\lambda}{dv}$, λ, v, dont l'intégrale générale est

$$\frac{1 + A\lambda}{B} = \text{const.}$$

On peut encore écrire que l'on a trois relations de la forme

$$aX'_0 = LaX_0 + MX'_0\,;$$

on obtient ainsi, après division par ax_0, une expression en a qui doit être nulle; par analogie cette même expression doit être nulle lorsqu'on remplace a par b ou c. Or, on constate que, mise sous forme entière, l'expression considérée est un trinome du second degré : l'équation du second degré devant avoir trois racines distinctes a, b, c, les coefficients doivent être nuls, ce qui donne

$$\begin{gathered}
L(1 + A\lambda) = A(1 + A\lambda) + A'\lambda + A\lambda', \\
LB(2 + A\lambda) - M[A(1 + A\lambda) + A'\lambda + A\lambda'] \\
= B(A'\lambda + A\lambda') + A(B - \lambda B'), \\
M[B(A'\lambda + A\lambda') + A(B - \lambda B')] = LB^2\,;
\end{gathered}$$

en éliminant L et M entre ces trois équations linéaires, on forme une équation en λ. En posant

$$\frac{A\lambda + 1}{B} = e^\theta,$$

on met L et M sous la forme suivante :

$$L = A + \theta' + \frac{B'}{B}, \qquad M = B\,\frac{L}{L + A\lambda\theta'},$$

et l'équation différentielle devient

$$\theta'\left(A + \frac{B'}{B}\right) = 0.$$

Si donc $A + \frac{B'}{B}$ est distinct de zéro, θ doit être nul et l'on trouve ainsi

$$\frac{A\lambda + 1}{B} = \text{const.},$$

$$L = A + \frac{B'}{B}, \qquad M = B.$$

Examinons le cas où $A + \frac{B'}{B}$ est nul. La courbe (x_0, y_0, z_0) satisfait alors à la condition

$$\frac{x'_0}{x_0} + \frac{B'}{B} - \frac{B'}{B - \alpha} = 0;$$

on peut donc poser, α, β, γ étant des constantes arbitraires,

$$x_0 = \alpha(1 + av), \qquad y_0 = \beta(1 + bv), \qquad z_0 = \gamma(1 + cv);$$

ce cas correspond donc aux surfaces (S) développables.

Écartons ce cas et supposons qu'il s'agit d'une surface (S_1) non développable. L'équation différentielle des asymptotiques de (Σ_1) se déduira de celle des asymptotiques de (S_1) en remplaçant A par $A + \frac{B'}{B}$: cela résulte des expressions trouvées pour L et pour M. Lorsque θ varie, en restant constant, on obtient une famille à un paramètre de surfaces (Σ_1); l'équation différentielle des asymptotiques de ces surfaces ne dépend pas de θ : les asymptotiques se correspondent donc sur les surfaces (Σ_1).

Dans le cas où L se réduit à A, et dans ce cas seulement, les asymptotiques des surfaces (Σ_1) correspondent aux asymptotiques de la surface (S_1) initiale ; on a alors $B' = 0$, $B = \text{const.}$, et la courbe imposée a pour équations

$$x_0 = \alpha v^{\frac{a}{a-B}}, \qquad y_0 = \beta v^{\frac{b}{b-B}}, \qquad z_0 = \gamma v^{\frac{c}{c-B}},$$

ce qui revient à prendre A égal à $\frac{1}{v}$. Par suite, on a

$$\lambda = kv,$$

$$X_0 = x_0\left(1 + \frac{ka}{a-B}\right),$$

$$Y_0 = y_0\left(1 + \frac{kb}{b-B}\right),$$

$$Z_0 = z_0\left(1 + \frac{kc}{c-B}\right);$$

la déformation considérée est donc une transformation homographique dépendant d'un paramètre arbitraire k. Les surfaces (Σ_1), qui comprennent la surface initiale (S_1), ont pour équation

$$x^{bc(b-c)(a-B)}\, y^{ca(c-a)(b-B)}\, z^{ab(a-b)(c-B)} = \text{const.},$$

et rentrent, conséquemment, dans la famille

$$x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = \text{const.}$$