NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. ZORETTI

Sur la poulie fixe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 213-221

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__213_1>

[R4aδ]

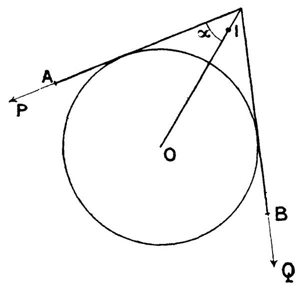
SUR LA POULIE FIXE;

Par M. L. ZORETTI.

On passe d'habitude avec une grande rapidité dans les cours de statique sur les conditions d'équilibre de la poulie fixe. Pourtant, précisément à cause de sa grande simplicité, cette machine simple fournit un excellent exemple à propos duquel on peut aisément expliquer un certain nombre de phénomènes : raideur, frottement, adhérence qui sont, pour les élèves, et pour tous les élèves, parmi les plus difficiles à saisir. Elle se prête également à des expériences d'une grande simplicité.

I. *On néglige les frottements.* — 1. Négligeons également la raideur et le poids de la poulie, de la corde et de la chape OI. Nous sommes donc dans les conditions de l'étude élémentaire. On se contente d'habitude de

Fig. 1.



dire : prenons les moments par rapport à O sans expliquer de quel système matériel il est question. Nous avons ici trois systèmes : deux solides, la chape et la poulie, et un déformable, la corde. Nous pourrons à volonté appliquer à l'un quelconque d'entre eux ou à leur réunion les conditions d'équilibre du corps solide, qui sont toujours des conditions *nécessaires* si elles ne sont pas suffisantes.

Prenons par exemple le système : corde-poulie. Les forces extérieures sont : 1° les forces P et Q appliquées aux extrémités de la corde (et non transportées aux points de contact comme on le fait sans nécessité) ; 2° la réaction de la chape sur la poulie. D'où l'équation des moments qui donne $P = Q$. Remarquons tout de suite que les frottements de la corde sur la poulie, forces intérieures, n'ont pas à intervenir. Dans le raisonnement qui précède il n'est donc pas nécessaire de les négliger.

La réaction est dirigée suivant la bissectrice des deux directions P, Q, et a pour valeur $2P\cos\alpha$.

Si nous considérons maintenant la chape OI, elle est en équilibre sous l'action de la force précédente appliquée en O et de la réaction du crochet I. Ces deux forces sont opposées. Donc la chape est dirigée suivant la bissectrice des deux directions P et Q.

2. En négligeant toujours les frottements, essayons de faire une théorie plus complète en introduisant les poids de la poulie et de la chape. Supposons même que la poulie ne soit pas exactement centrée au point de vue des masses. Son poids p_1 est appliqué au centre de gravité G distinct de O. On ne manque pas de faire observer que ce poids agit alors comme moteur pendant un demi-tour, comme poids résistant pendant un demi-tour. Or, considérons la poulie seule, et écrivons qu'elle est en équilibre. Les forces extérieures sont les réactions de la corde sur la poulie, de la chape sur la poulie et le poids de la poulie. Comme on néglige les frottements, les réactions sont normales à la surface de la gorge qui est de révolution; elles rencontrent donc l'axe O. Donc, le moment du poids par rapport à O doit être nul, c'est-à-dire que le point G est sur la verticale de O. Cela paraît assez étonnant à première vue et je conseille de faire réfléchir les élèves à ce paradoxe. L'explication en est d'ailleurs aisée : puisqu'on néglige le frottement, la corde n'adhère pas sur la

poulie; celle-ci tend à placer son centre de gravité sur la verticale du point O, et ne rencontre de la part de la corde aucun obstacle à ce déplacement.

Le raisonnement du paragraphe 7 subsiste. On a encore $P = Q$. Leur résultante dirigée suivant leur bissectrice est égale à $2P\cos\alpha$, et ajoutée au poids de la poulie elle fait connaître la réaction R du point O.

Considérons maintenant la chape. Elle est en équilibre sous l'action de trois forces : les deux réactions R au point O, R' au point fixe I et son poids p_2. La détermination soit géométrique, soit par le calcul de sa position d'équilibre (en considérant comme les données du problème les directions des forces P et Q), est très aisée : dans la figure OHGI, on connaît les directions HG, HI, HO et les longueurs OG, GI. La figure est donc connue en grandeur, et par suite en position puisque la droite indéfinie OH est donnée. Le calcul est intéressant à faire; je me contente de le signaler.

3. On peut également calculer facilement la pression normale de la corde sur la poulie, en la supposant uniformément répartie. Si l'on appelle p la pression par unité d'angle au centre, on trouve qu'elle est égale à P.

II. *On tient compte des frottements.* — 4. Comme je l'ai fait remarquer, pourvu qu'on suppose le centre de gravité de la poulie placé au point O, rien dans ce qui précède ne suppose qu'il faille négliger le frottement de la corde sur la poulie; c'est-à-dire que, tout en tenant compte de ce frottement, la condition d'équilibre reste $P = Q$. Or, l'expérience montre qu'il n'y a pas égalité entre la puissance et la résistance. Il est donc intéressant de chercher à se rendre compte de la véritable cause de ce fait.

Supposons, pour simplifier, la chape supprimée et l'axe de la poulie fixé par deux tourillons O mobiles dans deux coussinets. J'ai déjà remarqué que, pratiquement, si le mouvement a lieu, la poulie tourne, entraînée par la corde, tandis que, si nous négligions le frottement, la corde devrait glisser sur la poulie et celle-ci resterait immobile. Donc, pratiquement, il y a glissement des tourillons dans les coussinets; et il se produit là un frottement dont nous allons tâcher d'apprécier l'importance.

Supposons que, le coussinet étant légèrement plus grand que le tourillon, le contact entre ces deux cylindres ait lieu suivant une seule génératrice, d'ailleurs inconnue. Les réactions de la poulie sur les appuis pourront donc se réduire à une force unique R (s'il y a symétrie) appliquée au point de rencontre de cette génératrice et du plan de symétrie. Supposons que nous soyons dans les conditions ordinaires, c'est-à-dire considérons Q comme donné, et augmentons progressivement P jusqu'au moment où l'équilibre va cesser, en supposant qu'il y a adhérence de la corde; par suite la cessation de l'équilibre sur les tourillons exige que laf orce unique R précédente ait une composante tangentielle égale à Rf et opposée au mouvement futur, f étant le coefficient de frottement statique tourillon-coussinet. Il est alors facile de faire le calcul. Soit 2α l'angle de P avec Q, β l'angle de R avec la bissectrice de l'angle P, Q. Écrivons les conditions d'équilibre du système corde-poulie; en projetant sur cette bissectrice nous aurons

$$(P + Q)\cos\alpha = R\cos\beta + Rf\sin\beta.$$

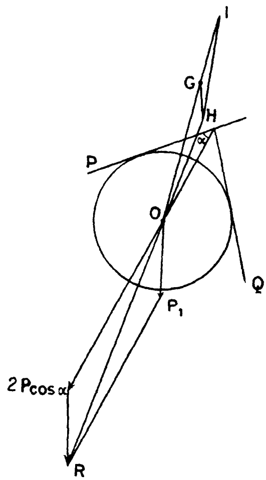
En projetant sur la perpendiculaire

$$(P - Q)\sin\alpha = R\sin\beta - Rf\cos\beta.$$

Et en prenant les moments par rapport à l'axe O

$$(P - Q)r = R f \rho.$$

Fig. 2.



On résout facilement ce système par rapport à P, β et R. Posons

$$f = \operatorname{tang}\varphi$$

et introduisons l'inconnue

$$\frac{P}{Q} = \lambda,$$

nous aurons

$$(1) \qquad \sin(\beta - \varphi) = \frac{\rho}{r} \sin\varphi \sin\alpha.$$

Puis

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \operatorname{tang}(\beta - \varphi) \cot\alpha,$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}.$$

Demandons-nous maintenant si, dans les mêmes conditions : Q donné, P croissant, l'équilibre pourrait être rompu par un glissement de la corde. La poulie est alors fixe. Nous sommes dans un cas bien connu, l'équilibre est rompu quand $\frac{P}{Q} = \lambda$ atteint la valeur suivante

$$\lambda' = e^{f'(\pi - 2\alpha)}, \tag{3}$$

f' désignant le coefficient de frottement corde-poulie.

On voit donc qu'il y aura rotation de la poulie et adhérence de la corde si

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\beta - \varphi)} < e^{f'(\pi - 2\alpha)}, \tag{4}$$

et, au contraire, il y aurait glissement de la corde si

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\beta - \varphi)} > e^{f'(\pi - 2\alpha)}. \tag{5}$$

Il est facile de montrer que *dans les cas usuels* c'est la première inégalité qui est satisfaite.

Prenons par exemple

$$r = 10^{\text{cm}}, \qquad \rho = 2^{\text{cm}},5,$$

donc

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{4};$$

puis

$$\alpha = 30^{\circ} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\varphi = 0,1$$

(métaux lubrifiés).

On trouve aisément $\varphi = 5^{\circ}43'$ et $\beta - \varphi = 43'$, puis

$$\lambda = \frac{\sin(\alpha + \beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \beta + \varphi)} = 1,04;$$

λ est donc très voisin de l'unité. Calculons au contraire λ'. On a

$$\log\lambda' = f'(\pi - 2\alpha)\log e,$$

d'où l'on tire

$$\lambda' = 3,7 \text{ environ.}$$

Il est intéressant de faire l'expérience et de déterminer le rapport $\frac{P}{Q}$ dans les deux cas. On se placera dans le second en calant la poulie de façon à empêcher sa rotation.

Il est intéressant de montrer également que le rapport $\frac{P}{Q}$ qui produit le roulement est supérieur au nombre trouvé, ce qui montre l'influence de la raideur de la corde qu'on a négligée.

Il est facile de se placer dans des conditions expérimentales telles que l'inégalité (5) ait lieu, au lieu de l'inégalité (4). Il suffira de diminuer le second membre, en remplaçant la corde par une courroie avec un enduit pour diminuer f'. On augmentera le premier membre au contraire en prenant un gros tourillon avec bande de roulement en cuir, en corde ou en bois $\left(\text{ce qui augmente } f \text{ et } \frac{\rho}{r}\right)$. Le coussinet sera également en bois, mouillé de préférence. On peut prendre $\rho = r$. Le coefficient f atteint 0,68. Dans ces conditions, les deux membres de l'inégalité sont sensiblement égaux pour $\alpha = 30^\circ$. En augmentant α, on modifiera peu le premier membre et notablement le second au contraire. On pourra donc voir se produire les deux faits et, en variant les conditions, montrer l'influence des différents facteurs sur le rapport λ.

Remarquons que le premier membre (comme le second) diminue quand α augmente. Sa dérivée a, en effet, le signe de $\rho^2 \sin^2\varphi - r^2$ [1] qui est négatif (au

---

[1] Posons $\beta - \varphi = \theta$ et $\rho \sin\varphi = ra$; on a donc

$$\sin\theta = a \sin\alpha,$$

moins si l'on veut que $\rho \leqq r$). Mais le second membre diminue plus vite.

Remarquons encore que pour $\alpha = 0$, on a $\beta = \varphi$. L'expression (2) de λ n'a plus de sens. Mais on a directement

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \rho \frac{\sin \varphi}{r},$$

ce qui permet encore de calculer λ.