NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur un complexe du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 205-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__205_1>

[$N^1 1 j$]

SUR UN COMPLEXE DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1881 (t. XCII, p. 446) et dans les *Annales*

de l'École Normale de 1889 (t. VI, p. 381), M. Darboux a été amené, à propos de la surface des ondes, à étudier une congruence de droites remarquable : celle qui est constituée par une droite dont trois points déterminés sont assujettis à rester dans trois plans rectangulaires.

A la suite de Dupin, qui avait établi que tout point de la droite engendre un ellipsoïde, diverses recherches avaient été faites relativement au déplacement de cette droite. M. Darboux démontra que la congruence est une congruence de normales; l'une des surfaces parallèles auxquelles reste constamment normale la droite a une définition géométrique simple : c'est le lieu du milieu du segment formé par la projection du sommet du trièdre trirectangle et par la trace de la droite sur une des trois faces de ce trièdre. Les lignes de courbure de cette surface sont algébriques.

Plus généralement, s'il existe deux relations entre les longueurs des trois segments de la normale à une surface compris entre le pied de cette normale et les traces sur trois plans rectangulaires, l'une de ces relations est nécessairement la suivante : les segments de normale compris entre les trois plans ont des rapports invariables.

Tels sont les résultats établis par M. Darboux. Vu l'importance de la congruence de normales précédente, je me suis proposé d'étudier le *complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires interceptent un segment de longueur constante*.

2. Je prendrai naturellement les deux plans pour plans coordonnés d'intersection Oz; soit $2a$ la longueur constante du segment qu'ils interceptent sur les rayons du complexe. En prenant les équations d'une droite

sous la forme

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

on trouve immédiatement la relation

$$4a^2 = (\beta x_0 - \alpha y_0)^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2 \beta^2}\right);$$

l'équation du complexe en coordonnées plückériennes p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 est donc

$$p_6^2 = 4a^2 \frac{p_1^2 p_2^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Le complexe est du quatrième ordre, résultat qu'il est aisé de prévoir géométriquement. Les courbes planes du complexe sont, en effet, des enveloppes de droites sur lesquelles deux droites fixes, rectangulaires ou obliques, interceptent des segments constants : ces courbes sont, par conséquent, des hypocycloïdes à quatre rebroussements ou des courbes parallèles d'hypocycloïdes à quatre rebroussements (*cf.* question 1391 des *Nouvelles Annales*, Laguerre). Ces courbes étant de la quatrième classe, le complexe est bien du quatrième ordre.

On peut d'ailleurs envisager les cônes du complexe. Soit M un point de l'espace; le cône du complexe de sommet M a pour base dans le plan $y = 0$, par exemple, la trace sur ce plan d'une surface conchoïdale du plan $x = 0$; cette courbe est du quatrième degré et, par conséquent, le complexe est du quatrième ordre.

3. La détermination des surfaces dont les normales appartiennent au complexe peut être effectuée de plusieurs façons.

Le complexe est engendré par une translation arbitraire parallèle à Oz d'une congruence de normales connue : on se trouve donc dans le cas où une famille de surfaces non parallèles connue a pour normales des droites du complexe. D'après un théorème de M. Darboux, on peut alors déterminer la surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe. Il suffit de considérer l'enveloppe d'une famille à un paramètre de surfaces choisies arbitrairement parmi les surfaces connues et leurs surfaces parallèles.

Il est aisé de former l'équation générale des surfaces précédentes en coordonnées tangentielles. En considérant une surface quelconque comme enveloppe du plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

les coordonnées plückériennes de la normale au point de contact de ce plan sont

$$\begin{aligned}
p_1 &= \cos\varphi \cos\psi,\\
p_2 &= \cos\varphi \sin\psi,\\
p_3 &= \sin\varphi,\\
p_4 &= \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} \sin\psi - \frac{\partial\varpi}{\partial\psi} \cos\psi \operatorname{tang}\varphi,\\
p_5 &= -\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} \cos\psi - \frac{\partial\varpi}{\partial\psi} \sin\psi \operatorname{tang}\varphi,\\
p_6 &= \frac{\partial\varpi}{\partial\psi}.
\end{aligned}$$

D'après ces relations, les surfaces cherchées ne sont autres que les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = \pm\, 2a \cos^2\varphi \cos\psi \sin\psi,$$

c'est-à-dire les surfaces d'équation générale

$$\varpi = \mp\, a \cos^2\varphi \cos^2\psi + \Phi,$$

dans laquelle Φ représente une fonction arbitraire de φ.

4. Comme application des formules précédentes il est possible de vérifier le théorème de M. Darboux sur la congruence des droites dont trois points décrivent les trois plans de coordonnées. Considérons les trois complexes

$$p_4^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2) = K_1^2 p_2^2 p_3^2,$$
$$p_5^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2) = K_2^2 p_3^2 p_1^2,$$
$$p_6^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2) = K_3^2 p_1^2 p_2^2;$$

écrivons que les trois équations

$$p \sin\psi - q \cos\psi \operatorname{tang}\varphi = K_1 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi,$$
$$-p \cos\psi - q \sin\psi \operatorname{tang}\varphi = K_2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi,$$
$$q = K_3 \cos^2\varphi \sin\psi \cos\psi,$$

sont compatibles en p et q; la condition est

$$K_1 + K_2 + K_3 = 0,$$

et elle est bien remplie actuellement : elle n'est autre que la relation algébrique entre les distances de trois points en ligne droite. Moyennant cette condition on a

$$p = \sin\varphi \cos\varphi (K_1 \sin^2\psi - K_2 \cos^2\psi),$$
$$q = -(K_1 + K_2) \sin\psi \cos\psi \cos^2\varphi;$$

entre ces expressions de p et de q existe la relation supplémentaire

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \sin 2\varphi \sin 2\psi,$$

qui exprime que p et q sont les dérivées $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial \varpi}{\partial \psi}$ d'une même fonction :

$$\varpi = \frac{1}{8}(1 + \cos 2\varphi)[(K_1 + K_2)\cos 2\psi + (K_2 - K_1)] + \text{const}.$$

Telle est l'équation des surfaces parallèles orthogonales aux droites de la congruence.

5. On peut encore appliquer au complexe précédent

$$p_6 = 2ap_1p_2,$$

la méthode de Transon. Si de chaque point M de l'espace on fait partir la droite de cosinus directeurs

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = -\frac{y}{a}, \qquad Z = \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}},$$

les projections du tourbillon du vecteur X, Y, Z sont

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{y}{a^2 Z},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{x}{a^2 Z};$$

les lignes de tourbillon sont donc des cercles d'axe Oz; les surfaces de tourbillon sont les surfaces de révolution autour de Oz. *Pour avoir la congruence de normales la plus générale du complexe considéré, il suffit donc de faire partir les droites* (X, Y, Z) *des divers points d'une surface de révolution autour de* Oz. En faisant varier arbitrairement cette dernière surface, on engendre toutes les congruences de normales du complexe.

6. La transformation de droites que j'ai étudiée dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 254) permet de donner une autre définition géométrique du même complexe. Appliquons-lui la transformation de droites; l'équation du complexe transformé est

$$p_2p_4 - p_1p_5 = 2ap_1p_2;$$

ce complexe est quadratique; il est possible de lui donner une définition remarquable ([1]).

Considérons en effet deux droites Δ, Δ' de l'espace. Nous supposons que Oz soit la perpendiculaire commune à Δ et Δ', que Oxy soit le plan équidistant de ces droites et enfin que Ox et Oy soient bissectrices de leurs directions. Cela revient à dire que nous prenons pour équations des droites Δ et Δ' :

$$(\Delta) \qquad z = 1, \qquad y = x \tang \alpha,$$
$$(\Delta') \qquad z = -1, \qquad y = -x \tang \alpha;$$

considérons le complexe linéaire

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4 + A_5 p_5 + A_6 p_6 = 0,$$

le plus général qui passe par Δ et Δ'. Les coordonnées plückériennes de ces deux droites étant

$$(\Delta) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} p_1 = \cos\alpha, & p_2 = \sin\alpha, & p_3 = 0, \\ p_4 = \sin\alpha, & p_5 = -\cos\alpha, & p_6 = 0, \end{array} \right.$$

$$(\Delta') \qquad \left\{ \begin{array}{lll} p_1 = \cos\alpha, & p_2 = -\sin\alpha, & p_3 = 0, \\ p_4 = \sin\alpha, & p_5 = \cos\alpha, & p_6 = 0. \end{array} \right.$$

on trouve pour conditions

$$(A_1 - A_5)\cos\alpha + (A_2 + A_4)\sin\alpha = 0,$$
$$(A_1 + A_5)\cos\alpha + (A_4 - A_2)\sin\alpha = 0;$$

([1]) La détermination des congruences de normales du complexe transformé est immédiate ; l'équation à intégrer

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = a \cos\varphi \sin 2\psi$$

admet pour intégrale générale

$$\varpi = a \sin\varphi \sin 2\psi + \Psi(\psi),$$

Ψ étant la fonction arbitraire d'intégration.

on peut donc poser

$$A_1 = \rho \sin\alpha, \qquad A_2 = \sigma\cos\alpha,$$
$$A_4 = -\rho\cos\alpha, \qquad A_5 = \sigma\sin\alpha,$$

ρ et σ étant arbitraires; A_3 et A_6 restent arbitraires.

Les équations de l'axe du complexe linéaire étant

$$\frac{A_1 + A_6 y - A_5 z}{A_4} = \frac{A_2 + A_4 z - A_6 x}{A_5} = \frac{A_3 + A_5 x - A_4 y}{A_6},$$

les coordonnées plückériennes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ de l'axe sont liées par les relations

$$\frac{A_1 - p_4}{p_1} = \frac{A_2 - p_5}{p_2} = \frac{A_3 - p_6}{p_3}$$

et des relations

$$A_1 = -p_1 \operatorname{tang}\alpha,$$
$$A_2 = p_2 \cot\alpha;$$

il résulte que l'axe engendre le complexe

$$\left(\frac{p_4}{p_1} - \frac{p_5}{p_2}\right)\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0;$$

d'où le théorème suivant : *Le complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires interceptent des segments de longueur constante peut être considéré comme correspondant au complexe lieu des axes des complexes linéaires assujettis à passer par deux droites données* (¹).

7. La congruence des droites dont trois points sont

(¹) Dans le cas où a est nul, les complexes considérés dégénèrent respectivement en le complexe linéaire spécial et en le complexe des droites équidistantes des deux points [*cf.* mes articles *Sur une transformation de droites* (1909), et *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques* (1910)].

assujettis à rester dans trois plans rectangulaires est représentée par les équations

$$p_4 = K_1 p_2 p_3, \qquad p_5 = K_2 p_3 p_1, \qquad p_6 = K_3 p_1 p_2,$$

compatibles pour $K_1 + K_2 + K_3 = 0$. Multiplions respectivement les trois équations précédentes par p_1, p_2, p_3, puis par trois constantes A, B, C et ajoutons; il vient

$$A p_1 p_4 + B p_2 p_5 + C p_3 p_6 = p_1 p_2 p_3 (AK_1 + BK_2 + CK_3);$$

il résulte de l'équation précédente que la congruence de normales considérée au paragraphe **1** appartient aussi à un complexe tétraédral; on peut prendre pour équation de ce complexe

$$(K_2 - K_3) p_1 p_4 + (K_3 - K_1) p_2 p_5 + (K_1 - K_2) p_3 p_6 = 0.$$

La surface envisagée par M. Darboux jouit donc des propriétés des surfaces dont les normales sont des rayons du complexe tétraédral; elle peut, en particulier, être considérée comme une surface telle que, sur chacune des faces du trièdre trirectangle, les traces de la normale et du plan tangent correspondant sont pôle et polaire par rapport à une certaine conique.