Nouvelles annales de mathématiques

E.-N. Barisien

Sur quelques séries

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 200-205

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__200_1>

[D2bα]

SUR QUELQUES SÉRIES;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Le but de cette Note est de déduire des séries remarquables comme conséquences des développements en séries de $\sin x$ et $\cos x$

$$(1)\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(2)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

1. Ces séries deviennent pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$(3) \qquad 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(4) \qquad 1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

En égalant les séries (3) et (4), on a, en divisant par $\frac{\pi}{2}$,

$$1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} - \ldots$$
$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

D'où

$$(5) \quad 1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3.4}$$
$$- \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots$$

2. En faisant $x = \pi$, (1) et (2) deviennent

$$(6) \quad 1 = \frac{\pi^2}{1.2.3} - \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots,$$

$$(7) \quad 2 = \frac{\pi^2}{1.2} - \frac{\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

En ajoutant (6) et (7), on a

$$(8) \quad 3 = \frac{4\pi^2}{1.2.3} - \frac{6\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{8\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

En ajoutant (8) et (6), on a encore

$$(9) \quad 4 = \frac{5\pi^2}{1.2.3} - \frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

En général, on a, pour un nombre entier quelconque λ,

$$(10)\quad \lambda = \frac{(\lambda+1)\pi^2}{1.2.3} - \frac{(\lambda+3)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\lambda+5)\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

3. En retranchant (6) et (7), on a

$$(11)\quad 1 = \frac{\pi^2}{1.3} - \frac{\pi^4}{1.2.3.5} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.7} - \frac{\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.9} + \dots$$

4. Multiplions (6) par (2), il vient

$$(12)\quad 2 = \frac{\pi^2}{1.3} - \frac{\pi^4}{1.3.4.5} + \frac{\pi^6}{1.3.4.5.6.7} - \dots$$

En retranchant (7) et (12), on obtient

$$(13)\quad 0 = \frac{\pi^2}{1.2.3} - \frac{3\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{5\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{7\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \dots$$

On en déduit aussi

$$(14)\quad 1 = \frac{3\pi^2}{4.5} - \frac{5\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{7\pi^6}{4.5.6.7.8.9} - \dots$$

ou

$$(15)\quad 20 = 3\pi^2 - \frac{5\pi^4}{6.7} + \frac{7\pi^6}{6.7.8.9} - \dots$$

En ajoutant (7) et (12), on a encore

$$(16)\quad 4 = \frac{5\pi^2}{1.2.3} - \frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

5. En faisant $x = 2\pi$ dans (1), on a

$$(17)\quad 1 = \frac{(2\pi)^2}{1.2.3} - \frac{(2\pi)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(2\pi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

De même, pour $x = 2\lambda\pi$, λ étant un nombre entier, on a

$$(18)\qquad 1 = \frac{(2\lambda\pi)^2}{1.2.3} - \frac{(2\lambda\pi)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(2\lambda\pi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

La valeur $\lambda = 2\pi$ dans (2) donne

$$(19)\qquad 1 = \frac{(2\pi)^2}{3.4} - \frac{(2\pi)^4}{3.4.5.6} + \frac{(2\pi)^6}{3.4.5.6.7.8} - \ldots.$$

On a aussi pour $x = 2\lambda\pi$ (λ entier)

$$(20)\qquad 1 = \frac{(2\lambda\pi)^2}{3.4} - \frac{(2\lambda\pi)^4}{3.4.5.6} + \frac{(2\lambda\pi)^6}{3.4.5.6.7.8} - \ldots.$$

6. En faisant $x = 45^\circ$ dans (1) et (2), on a

$$(21)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(22)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

En ajoutant ces deux dernières séries, on a l'expression de $\sqrt{2}$ en fonction de π

$$(23)\qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

7. Faisons $x = 30^\circ$ dans (1) et (2), il en résulte

$$(24)\qquad \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(25)\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

8. La valeur $x = 60^\circ$ donne pour (1) et (2)

$$(26)\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(27)\qquad \frac{1}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

9. En ajoutant (25) et (26), on a l'expression de $\sqrt{3}$ en fonction de π

$$(28)\qquad \sqrt{3} = 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

10. L'égalité de (24) et (27) donne

$$(29)\qquad 1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

11. L'égalité de (25) et (26) donne de même

$$(30)\qquad 1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

12. Pour $x = 18^\circ$, $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donc (1) devient

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\pi}{20} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Il en résulte le développement de $\sqrt{5}$ en fonction de II

$$(31)\quad \sqrt{5} = 1 + 4\left[\frac{\pi}{20} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7} \cdots\right].$$

13. On peut, par des combinaisons d'addition ou soustraction de ces diverses séries, en obtenir une infinité d'autres.

Par exemple, l'addition de (23) et (28) donnera la curieuse série suivante du développement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ en fonction de π :

$$(32)\quad \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2 + \frac{7\pi}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

Et l'on sait que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est une valeur approchée de π.