

E. DOUCET

Sur le planimètre de Pritz

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 193-200

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[X 6]

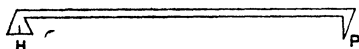
SUR LE PLANIMÈTRE DE PRITZ;

PAR LE LIEUTENANT E. DOUCET.

But. — Le but de cette étude sommaire est de donner une théorie complète du fonctionnement de cet appareil, de mettre en évidence les différentes approximations à faire pour établir sa théorie, et enfin d'établir la valeur de la précision de l'appareil.

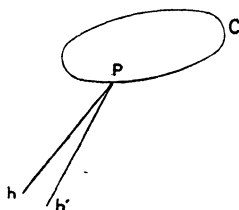
Description et mode d'emploi du planimètre de Pritz. — Le planimètre de Pritz se compose essen-

Fig. 1.



tiellement d'une tige métallique HP recourbée à ses deux extrémités. L'une d'elles P est une pointe mousse, l'autre H est une lame dont le plan est le plan de l'axe de la tige et de l'axe de la pointe P. Sur cette lame, en

Fig. 2.



son milieu, se trouve un trait de repère : c'est celui-ci que nous appellerons plus particulièrement H.

Ayant à déterminer l'aire d'une courbe C on place la

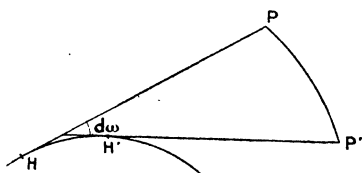
pointe P en un point quelconque de C, la lame H en un point quelconque de la feuille d'Épure à l'extérieur de C. On marque le point où se trouve H. Soit h ce point. On fait décrire la courbe C au point P. Quand la pointe P est revenue à son point de départ, la lame H occupe une certaine position, soit h' le point où se trouve H, l'aire de la courbe C est proportionnelle à la distance d des deux points h, h' .

Cette propriété se vérifie expérimentalement d'une manière aisée.

En partant d'un point fixe h on fait plusieurs mesures : on trouve des points h', h'', h''' répartis, aux erreurs d'expérience près, sur une circonférence de centre h .

Théorie de l'appareil. — Soit C la courbe décrite par le point P; d'après la forme de la lame reposant

Fig. 3.



sur le papier, la droite HP restera dans son mouvement constamment tangente au lieu de H. La courbe C est la courbe obtenue en portant sur les tangentes à TT, à partir des points de contact, des longueurs égales à la longueur L du planimètre. TT est la trajectoire orthogonale des cercles de rayon égal à L et dont les centres décrivent C. Une application de la théorie des trajectoires orthogonales de cercles ou une démonstration directe très simple montre que si la tige du planimètre est tangente à C le point correspondant de TT est point

d'inflexion, et si la tige du planimètre est normale à C le point correspondant de TT' est point de rebroussement.

Élément infinitésimal d'aire. — Soient deux positions infiniment voisines $HP, H'P'$ de la tige du planimètre. Évaluons l'aire balayée par la tige du planimètre en convenant de compter les variations d'angle positivement quand la tige du planimètre tourne dans le sens direct, négativement dans le cas contraire. La partie principale de cette aire infinitésimale $HP, H'P'$ est $L^2 d\omega$.

Aire finie. — L'aire balayée par la tige du planimètre entre deux positions HP, H_1P_1 , faisant entre elles un angle Ω est donc

$$\int_0^{\Omega} L^2 d\omega = L^2 \Omega,$$

Ω étant évalué en radian. Si donc nous convenons de compter comme positives les aires balayées par la tige du planimètre tournant dans le sens direct, comme négatives les aires balayées par la tige du planimètre tournant dans le sens inverse, nous aurons le résultat :

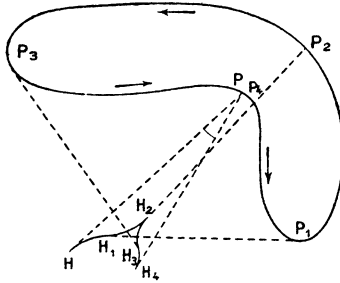
La somme algébrique des aires balayées par la tige du planimètre est égale au produit du carré de la longueur de la tige par l'angle, en radian, des deux positions extrêmes de la tige.

Cas d'une courbe fermée. — Soit C une courbe fermée, partons de la position initiale du planimètre PH . Décrivons la courbe C dans le sens indiqué par la flèche. Au moment où la tige est tangente à C en P, le point H est en H_1 , qui est un point d'inflexion.

(196)

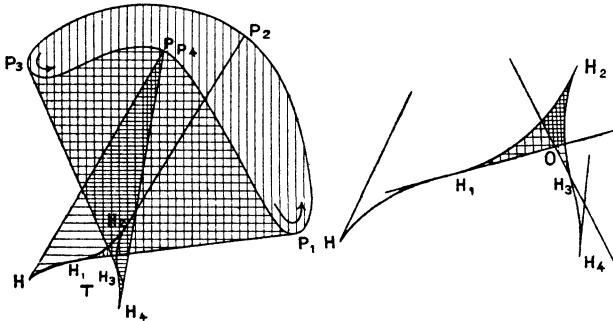
Continuons par les positions successives de P : $P_2 P_3 P_4$. Lorsque la pointe P est revenue en P , point

Fig. 4.



de départ, H est en H_1 . Soit Ω , l'angle, en radian, des deux positions extrêmes de la tige du planimètre. La somme algébrique des aires balayées par la tige est égale à $L^2 \Omega$. Évaluons cette somme algébrique. Soit C l'aire de la courbe et A l'aire du secteur du centre P et limité par la courbe TT . Marquons sur la figure par des

Fig. 5.



traits horizontaux sur les aires négatives des traits verticaux sur les aires positives. On voit que la somme algébrique des aires balayées par la tige de l'appareil

est $C - A$. On a donc la relation

$$C - A = L^2 \Omega.$$

Nécessité d'approximations. — La théorie jusqu'à présent est rigoureuse, mais elle ne donne rien, puisque A n'est pas connu. De plus A ne peut pas être facilement calculé en fonction de C et il existe de nombreux cas très simples où A ne peut pas être calculé en fonction de C .

Pour pousser plus loin la théorie, il est nécessaire de procéder à des approximations, quitte à calculer ensuite une limite supérieure de l'erreur commise.

Première approximation. — Nous supposons que l'aire A est égale à l'aire du secteur circulaire de centre P et de rayon L , autrement dit nous confondrons l'aire du secteur curviligne $PH'H_2H_4$ avec l'aire du secteur circulaire $PH'H_4$

$$A = L^2 \Omega.$$

D'où

$$C = L^2 \Omega + L^2 \Omega = 2L^2 \Omega.$$

Soit δ la distance des deux points H, H_4 , distance comptée suivant l'arc de circonférence HH_4 ,

$$\delta = L \Omega,$$

d'où, par élimination de Ω ,

$$C = 2L\delta.$$

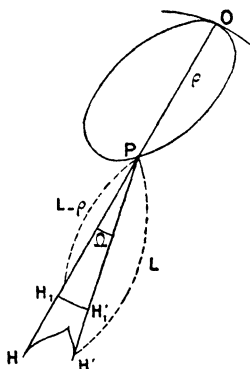
Deuxième approximation. — Comptons la distance d des deux points H, H_4 suivant la droite HH_4 et confondons d et δ , nous aurons finalement

$$C = 2Ld.$$

D'où un procédé connaissant L , mesurant d , pour calculer C .

Étude de la précision de l'instrument. Erreur provenant de la première approximation. — Soit ρ la distance au point P du point de la courbe C le plus éloigné de P , soit Q ce point; disposons l'instrument sensiblement dans la direction PQ . Tous les points de la courbe T se trouveront, dans ces conditions, en dehors de la courbe enveloppe des cercles de rayon L et dont les centres sont distribués sur le cercle de centre P et de rayon ρ . Ce n'est pas là une condition géométrique rigoureuse. En pratique elle est toujours satisfaite parce que L est grand par rapport à ρ . Cette courbe enveloppe est la circonférence de centre P et de rayon $L - \rho$. La courbe T est donc comprise entre les

Fig. 6.



circonférences de centre P et de rayon L et $L - \rho$. L'erreur ϵ commise en remplaçant l'aire limitée par T par l'aire du secteur circulaire est inférieure à l'aire $HH'H_1H_1'$, dont l'expression est $L^2\Omega - (L - \rho)^2\Omega$. Pour avoir une limite supérieure de l'erreur relative $\frac{\epsilon}{C}$ rem-

plaçons ε par une valeur supérieure $[L^2 - (L - \rho)^2] \Omega$
et C par une valeur inférieure

$$C = L^2 \Omega + A > L^2 \Omega + L^2 \Omega + (L - \rho)^2 \Omega;$$

comme limite supérieure η de l'erreur relative commise
on a donc

$$\eta = \frac{L^2 - (L - \rho)^2}{L^2 + (L - \rho)^2},$$

ou, en mettant en évidence le rapport $\frac{\rho}{L}$,

$$\eta = \frac{1 - \left(1 - \frac{\rho}{L}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\rho}{L}\right)^2}.$$

Avec un planimètre donné, L est constant. Il faudra
donc prendre ρ de telle manière que η soit aussi voisin
de zéro que possible, c'est-à-dire ρ tel que

$$\frac{\rho}{L} \text{ soit aussi faible que possible,}$$

ou tel que

$$\frac{\rho}{L} \text{ soit aussi voisin de 2 que possible.}$$

Cette dernière condition se traduisant par

$$\frac{\rho}{L} = 2 \quad \text{ou} \quad \rho = 2L,$$

on voit qu'elle est incompatible avec la théorie précé-
dente, supposant L grand par rapport à ρ .

Reste donc la première condition : on en déduit la
règle pratique d'usage :

Prendre comme point de départ P , un des points
tels que la distance, à ce point P , du point Q de la
courbe C le plus éloigné de P soit aussi faible que
possible, et tel que la courbe C soit tout entière d'un

même côté de la tangente en P à la courbe. Orienter la tige du planimètre sensiblement dans la direction PQ.

Dans ces conditions en désignant par ρ la distance PQ, l'erreur relative commise est inférieure à

$$\eta = \frac{1 - \left(1 - \frac{\rho}{4}\right)^2}{1 + \left(1 - \frac{\rho}{4}\right)^2}.$$

Exemple numérique. — Évaluer l'aire d'un cercle de 5^{cm} de rayon avec un planimètre dont la tige est longue de 100^{cm}. $\eta = \text{enviro}^n \frac{1}{9}$.

L'instrument, s'il est très simple, est très peu précis.

Erreur provenant de la deuxième approximation. — Elle est négligeable devant la précédente, l'angle Ω étant toujours faible si L est grand.