Certificats de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 179-182
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__179_1>

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

On considère, en chaque point M *d'une ligne* (L) *tracée sur une surface donnée, la sphère* σ *qui touche la surface* *et qui contient le cercle osculateur de* (L); *on désigne par* σ_1, σ_2 *les deux sphères* σ *relatives aux deux lignes de courbure du point* M, *par* $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ *les courbures principales correspondantes, par* φ *l'angle que fait la tangente à* (L) *avec la première ligne de courbure; on représente enfin par les mêmes lettres accentuées les mêmes éléments relatifs au point* M' *de* (L), *infiniment voisin de* M.

1° *Démontrer les formules suivantes :*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &MM'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\cos\varphi = (\widehat{\sigma_2, \sigma'_2}),\\ &MM'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi = (\widehat{\sigma_1, \sigma'_1}),\\ &MM'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{(\widehat{\sigma_1, \sigma'_1})(\widehat{\sigma_2, \sigma'_2})}{(\widehat{\sigma, \sigma'})},\\ &\frac{1}{(\widehat{\sigma, \sigma'})^2} = \frac{1}{(\widehat{\sigma_1, \sigma'_1})^2} + \frac{1}{(\widehat{\sigma_2, \sigma'_2})^2}, \end{aligned}\right.$$

et tirer de ces formules les conséquences qu'elles comportent, au point de vue de la transformation par inversion.

2° Σ *étant la sphère osculatrice de* (L) *au point* M, θ *l'angle sous lequel cette sphère coupe la surface, démontrer qu'on a*

$$(2)\qquad (\widehat{\Sigma\Sigma'}) \pm (\widehat{\sigma, \sigma'}) \pm d\theta = 0.$$

Conséquences de la relation (2).

N. B. — *Le symbole* $(\widehat{S, T})$ *représente l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces* S *et* T.

(Juillet 1910.)

1° Question de cours. — *Détermination des lignes de courbure et des courbures principales d'une surface quelconque, en coordonnées curvilignes.*

2° Application. — *Calculer la courbure totale* $\frac{1}{R_1 R_2}$ *et la courbure moyenne* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ *de l'hélicoïde :*

$$\begin{aligned} x &= u \cos(U + v), \\ y &= u \sin(U + v), \\ z &= kv, \end{aligned}$$

k étant une constante, U *une fonction de u ; montrer que l'on peut, par des quadratures, déterminer cette fonction* U *de telle sorte qu'il existe une relation linéaire constante entre la courbure totale et la courbure moyenne.*

(Novembre 1910.)

Rennes.

Composition écrite. — 1° *Sur deux surfaces* S *et* S_1 *non développables on fait correspondre les points* M *et* M_1 *où les plans tangents sont parallèles. Soient une courbe* C *située sur* S *et passant par* M, MT *la tangente en* M *à* C, $M\Theta$ *la direction conjuguée; soient* C_1, M_1T_1, $M_1\Theta_1$ *les éléments correspondants sur* S_1.

Montrer que $M\Theta$ *et* $M_1\Theta_1$ *sont parallèles. En déduire que, si* MT *tourne autour de* M *dans le plan tangent,* MT *et* M_1T_1 *se correspondent homographiquement; définir cette homographie au moyen des directions asymptotiques en* M *et* M_1.

2° *Il y a deux directions* MT *telles que* M_1T_1 *soit parallèle à* MT; *il existe sur* S *deux familles de courbes, à savoir les courbes* (α) *et les courbes* (β) *telles que les courbes correspondantes de* S_1, *à savoir* (α_1) *et* (β_1) *admettant en chaque point une tangente parallèle à la tangente correspondante de* (α) *ou de* (β). *Les courbes* (α) *et* (β) *sont conjuguées sur* S; *les courbes* (α_1) *et* (β_1) *sont conjuguées sur* S_1.

3° *Appliquer ce qui précède à une surface quelconque* S *et à une sphère* S_1. *Montrer que l'on retrouve les lignes de courbure de* S.

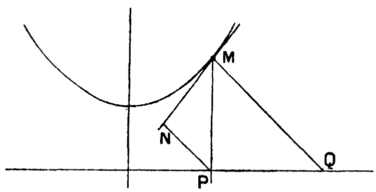
4° *Vérifier que sur les deux surfaces*

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = 3\beta + 3\beta\alpha^2 - \beta^3, \\ z = 3\alpha^2 - 3\beta^2, \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{S}_1)\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}, \\ y_1 = \dfrac{-2\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}, \\ z_1 = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2+1}, \end{array}\right.$$

dont la seconde (S_1) *est une sphère, les points de paramètres* α, β *se correspondent d'après la règle précédente et que les courbes* $\alpha = \text{const.}$ *sur* $\beta = \text{const.}$ *se correspondent avec parallélisme des tangentes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Soit la chaînette* $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. *La parallèle à* O$y$ *menée par* M *coupe* Ox *en* P. *La perpendiculaire à la tangente abaissée de* P *coupe cette*



tangente en N. *On considère le lieu du point* N. *Construire cette courbe appelée « tractrice ».*

II. *En tournant autour de* Ox *la chaînette et la tractrice engendrent deux surfaces de révolution dont on demande de trouver les rayons de courbure principaux en* M *et en* N.

Vérifier que la chaînette engendre une surface minima ($\mathrm{R} + \mathrm{R}' = 0$) *et la tractrice une surface à courbure totale constante* ($\mathrm{RR}' = \text{const.}$). (Novembre 1910.)