Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 175-179
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__175_1>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que toute fonction elliptique aux périodes* 2ω, $2\omega'$ *est une fonction rationnelle de* pu *et* $p'u$.

II. *Soit* $\rho = f(\theta)$ *l'équation d'une courbe plane* C *en* *coordonnées polaires. Sur le rayon vecteur* OM *d'un point quelconque* M *de cette courbe on porte une longueur constante* MP *égale à a et dans le sens* MO. *Déterminer* $f(\theta)$ *de façon que, lorsque le point* M *parcourt la courbe* C, *l'aire balayée par le rayon vecteur* OP *soit égale à l'arc que décrit le point* M, *multiplié par une longueur constante b. On emploiera les fonctions de Jacobi et l'on supposera $2a > b$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La fonction* $\wp u$ *satisfaisant à la relation*

$$\wp'^2 u = 4\wp u(\wp^2 u - 1),$$

trouver la fonction primitive de

$$\frac{\wp^6 u}{(\wp u - 1)^2}.$$

(Juin 1910.)

Lille.

PREMIÈRE QUESTION. — *Étude des valeurs réelles de la fonction* $\wp u$:

1° *Lorsque, l'une des périodes étant réelle, l'autre est purement imaginaire;*

2° *Lorsque les deux périodes sont imaginaires conjuguées.*

Calculer, dans les deux cas, les périodes 2ω, $2\omega'$, *en fonction des invariants* g_1, g_2.

Construire, dans les deux cas, la courbe

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u.$$

DEUXIÈME QUESTION. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(1) \qquad f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0:$$

1° *Définir ce qu'on entend par une* intégrale complète; *faire voir comment on peut, d'une pareille intégrale, déduire toutes les autres;*

2° *Montrer comment l'intégrale singulière peut être déduite directement de l'équation* (1).

(Juillet 1910.)

1° *On considère la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2 a + nz}.$$

A quelle condition doit satisfaire la constante a pour que cette série soit convergente quel que soit z?

2° *Cette condition étant supposée remplie, démontrer que la somme* $\Theta(z)$ *de cette série est une fonction entière de z qui admet deux périodes, l'une de première, l'autre de troisième espèce; faire voir que* $\Theta(z)$ *s'annule une fois et une seule dans chaque parallélogramme construit sur ces deux périodes; donner l'expression générale des* zéros *de* $\Theta(z)$.

3° *Établir la relation qui existe entre la fonction* Θ *et la fonction* σ *construite avec les mêmes périodes. Décomposer* $\Theta(z)$ *en un produit de facteurs primaires.*

(Novembre 1910.)

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation*

$$g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} g(y) \cos(x+y) dy = 1,$$

où λ *est une constante donnée et g une fonction inconnue.*

1° *Dans l'hypothèse* $\lambda = 1$, *donner la solution de cette équation, en se servant des formules de Fredholm;*

2° *Comment faut-il choisir* λ *pour que cette équation cesse d'avoir une solution unique? Que se passe-t-il alors?*

II. *Dans un plan, rapporté à des coordonnées polaires d'origine* O *et d'axe polaire* O*u*, *on désigne par y* ($0 \leqq y \leqq 2\pi$) *l'angle polaire d'un point quelconque du cercle* (C) *de centre* O *et de rayon* 1; *et par a, x* ($a > 0$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$) *les coordonnées polaires d'un point* P *quelconque. Soit alors* W *le potentiel en* P *de la double couche de moment* $g(y)$ *disposée sur le cercle* (C).

1° *Mettre* W *sous la forme*

$$W = -\int_0^{2\pi} g(y) A(x, y \mid a)\, dy;$$

et, dans l'hypothèse $a < 1$, *développer* A *et* W *suivant les puissances entières de* a;

2° *Montrer que, si* W *est nul, quel que soit* x, *pour une valeur particulière quelconque de* a, *inférieure à* 1, W *est identiquement nul, ainsi que la fonction* g;

3° *En conclure que, pour* $a < 1$, *le noyau* A *est fermé et que la suite*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

est fermée;

4° *Trouver les valeurs et les fonctions fondamentales du noyau* A, *pour* $a < 1$.

Épreuve pratique. — Épure (*données en centimètres*) : intersection d'un cône et d'un cylindre. — *Le cône, limité à sa base et à son sommet, a pour base dans le plan horizontal une circonférence* (*centre* $x = 0$, $y = 10$, $z = 0$; *rayon* = 8). *Le sommet est le point* $x = 0$, $y = 10$, $z = 16$. *Le cylindre a pour base un cercle de front* (*centre* $x = 3$, $y = 10$, $z = 5$; *rayon* = 5); *les génératrices sont horizontales, et inclinées à* 45° *sur le plan vertical de gauche avant à droite arrière. Représenter la partie solide du cône extérieure au cylindre.* (Juillet 1910.)

Épreuve écrite. — I. *Établir les formules relatives au passage à travers la couche attirante pour les dérivées premières d'un potentiel de double couche.*

II. *On imagine les opérations de Fredholm fournies par les divers noyaux* $A(x, y)$ *qui satisfont à un même système, supposé donné, d'équations aux dérivées partielles de la forme*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial A}{\partial x} + \varphi(x) A = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + g(y)\frac{\partial A}{\partial y} + \psi(y) A = 0:$$

1° *Montrer que ces opérations forment un groupe;*

2° *Montrer qu'à une opération quelconque de ce groupe correspond, en général, une opération du même groupe qui en est l'inverse;*

3° *Déduire de là une méthode de résolution des équations de Fredholm qui correspondent à un noyau* A *de l'espèce considérée; et comparer les formules obtenues à celles que donne la méthode de Fredholm;*

4° *Examiner le cas singulier, dans la résolution des équations de Fredholm de ce même type.*

Nota. — *Toutes les intégrales définies correspondant aux opérations et équations de Fredholm considérées seront supposées prises entre les mêmes limites constantes.*

Epreuve pratique. — *Soit*

$$k = \sin\theta, \qquad k_1 = \sin\theta_1, \qquad k_2 = \sin\theta_2, \qquad \ldots;$$

$$1 + k_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}, \qquad 1 + k_2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}, \qquad 1 + k_3 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta_2}{2}}, \qquad \ldots$$

Enfin

$$\frac{\pi}{2K} = \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \cos^2\frac{\theta_1}{2} \cdot \cos^2\frac{\theta_2}{2} \cdots$$

Calculer K *avec l'approximation que comportent les Tables à 7 décimales, sachant que* $k^2 = \frac{1}{2}$. *On rappelle que* $\pi = 3,14159265\ldots$

(Novembre 1910.)