NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 165-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__165_1>

[$O^1 7a$]

SUR LES CONGRUENCES DE DROITES QUI ADMETTENT UN POINT POUR SURFACE CENTRALE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Les *Nouvelles Annales* de 1910 (p. 49 et p. 529) ont publié deux articles très intéressants de M. E. Keraval sur les *Surfaces partiellement cylindroïdes.* Entre autres résultats remarquables, M. Keraval a établi que la congruence formée par les génératrices d'un même système des quadriques

$$\frac{x^2}{(\beta+\sigma)(\gamma+\sigma)}+\frac{y^2}{(\gamma+\sigma)(\alpha+\sigma)}+\frac{z^2}{(\alpha+\sigma)(\beta+\sigma)}+1=0,$$

signalées par M. G. Humbert, en 1890, jouit de la propriété suivante : *la surface centrale de cette congruence* (c'est-à-dire l'enveloppe du plan équidistant des points focaux de chaque rayon) *est réduite au centre commun* O *des quadriques* (p. 539 des *Nouvelles Annales* de 1910). Je me propose de déterminer toutes les congruences de droites qui jouissent de la même propriété, de donner une réciproque du théorème relatif à la congruence considérée par M. Keraval et, enfin, de montrer comment, un complexe de droites étant donné, il est possible de déterminer les congruences de ce complexe qui jouissent de la propriété en question.

I.

2. Soit une droite de coordonnées plückériennes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$; les trois premières de ces six coordonnées sont les cosinus directeurs de la droite par rapport aux axes rectangulaires $O(x, y, z)$; ces cosinus directeurs dépendent de deux paramètres u et v par les formules

$$p_1 = \frac{u+v}{uv+1}, \qquad p_2 = \frac{i(v-u)}{uv+1}, \qquad p_3 = \frac{uv-1}{uv+1};$$

p_4, p_5, p_6 sont des fonctions de u et de v; dans ces conditions, la droite envisagée engendre une congruence. Soient d'autre part x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection sur cette droite de l'origine des coordonnées; tout point de la droite ayant des coordonnées

$$x_0 + \frac{1}{2}(1+uv)^2 \mu p_1,$$

$$y_0 + \frac{1}{2}(1+uv)^2 \mu p_2,$$

$$z_0 + \frac{1}{2}(1+uv)^2 \mu p_3,$$

l'équation du second degré en μ dont dépendent les points focaux est

$$\mu^2 + \mu \mathbf{S}\left(\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)$$
$$+ \mathbf{S}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} \times \mathbf{S}\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u} - \mathbf{S}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} \times \mathbf{S}\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la surface centrale de la congruence dégénère tangentiellement en le point O est celle

$$\mathbf{S}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}=0$$

qui exprime que le point (x_0, y_0, z_0) est le milieu du segment focal.

En vertu des relations

$$\mathbf{S}p_1 x_0 = 0, \qquad \mathbf{S}p_1\frac{\partial p_1}{\partial u}=0, \qquad \mathbf{S}p_1\frac{\partial p_1}{\partial v}=0,$$

on peut poser

$$x_0 = \mathrm{L}\frac{\partial p_1}{\partial u}+\mathrm{M}\frac{\partial p_1}{\partial v},$$

$$y_0 = \mathrm{L}\frac{\partial p_2}{\partial u}+\mathrm{M}\frac{\partial p_2}{\partial v},$$

$$z_0 = \mathrm{L}\frac{\partial p_3}{\partial u}+\mathrm{M}\frac{\partial p_3}{\partial v};$$

il résulte alors de formules remarquables entre les dérivées des cosinus directeurs, formules qui découlent d'ailleurs de la théorie générale de la représentation sphérique des surfaces, que la condition précédente prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\mathrm{L}}{(1+uv)^2}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\mathrm{M}}{(1+uv)^2}\right]=0;$$

cette dernière forme de la condition conduit immédiatement à la solution suivante du problème que je m'étais proposé : soit F une fonction absolument quelconque des variables u et v; il suffit, dans les expressions ci-dessus données des coordonnées x_0, y_0, z_0 de la projection de O sur le rayon (u, v) de la congruence, de poser

$$\mathrm{L} = (1+uv)^2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v},$$

$$\mathrm{M} = -(1+uv)^2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}.$$

3. La détermination analytique de la congruence la plus générale dont la surface centrale est réduite au point O est ainsi complètement effectuée. Voici une définition géométrique fort simple qui découle des considérations que j'ai développées dans un article *Sur une transformation de droites*, publié par les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 249), et dans un article qui fait suite au précédent, *Sur les surfaces de M. Appell* (1910, p. 145).

Il résulte des expressions précédentes de L et de M que celles de x_0, y_0, z_0 sont susceptibles d'être mises sous les formes suivantes :

$$(x_0, y_0, z_0) = \frac{i}{2}(1 + uv)^2 \left[\frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varpi, p_2)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varpi, p_3)}{\partial(u, v)} \right],$$

où ϖ désigne une fonction quelconque des variables u et v.

Appliquons la transformation de droites : x_0, y_0, z_0 se changent respectivement en les coordonnées p_4, p_5 p_6 de la droite transformée; u est changé en $-\frac{1}{v}$ et v en $-\frac{1}{u}$; finalement p_4, p_5, p_6 se présentent sous les formes (analogues à celles de x_0, y_0, z_0)

$$p_4 = \frac{i}{2}(1 + uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)}, \qquad \ldots,$$

caractéristiques des congruences de normales. Ainsi donc : *La congruence la plus générale dont la surface centrale est réduite au point* O *est transformée, par rapport à ce point, de la congruence de normales la plus générale.*

Il suffit donc d'appliquer la transformation de droites à une congruence quelconque de normales pour obtenir une congruence de droites dont les milieux des segments focaux sont les projections du point fixe O.

Dans mes articles cités, j'avais établi la propriété d'invariance, dans la transformation, qui caractérise les congruences de normales aux surfaces de M. Appell, congruences qui, par définition, sont des cas particuliers de celles que j'envisage actuellement. Le théorème que j'avais signalé relativement aux surfaces de M. Appell est donc complété par le résultat précédent.

4. La condition trouvée au paragraphe 2

$$\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}=0,$$

peut être mise sous une autre forme, en introduisant les coordonnées pluckériennes par les formules

$$\begin{aligned} x_0 &= p_3 p_5 - p_2 p_6, \\ y_0 &= p_1 p_6 - p_3 p_4, \\ z_0 &= p_2 p_4 - p_1 p_5, \end{aligned}$$

et en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_3\frac{\partial p_2}{\partial u}-p_2\frac{\partial p_3}{\partial u} &= i\frac{\partial p_1}{\partial u}, \qquad \ldots, \\ p_2\frac{\partial p_3}{\partial v}-p_3\frac{\partial p_2}{\partial v} &= i\frac{\partial p_1}{\partial v}, \qquad \ldots; \end{aligned}$$

il vient alors

$$\frac{\partial(p_4, p_1)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(p_5, p_2)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(p_6, p_3)}{\partial(u, v)}=0.$$

Cette relation entraîne pour la congruence transformée celle

$$\frac{\partial(x_0, p_1)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(y_0, p_2)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(z_0, p_3)}{\partial(u, v)}=0$$

qui caractérise les congruences de normales (x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées d'un point quelconque de départ des rayons).

II.

5. Soit maintenant une famille dépendant d'un paramètre σ de quadriques coaxiales :

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}+1=0;$$

les génératrices définies par trois complexes linéaires

$$p_4=\mu_1 p_1, \qquad \text{où} \qquad \mu_1^2=\frac{BC}{A},$$

$$p_5=\mu_2 p_2, \qquad \text{où} \qquad \mu_2^2=\frac{CA}{B},$$

$$p_6=\mu_3 p_3, \qquad \text{où} \qquad \mu_3^2=\frac{AB}{C},$$

engendrent une congruence. Je me propose de déterminer toutes les familles de quadriques coaxiales telles que cette congruence soit une de celles que je viens de considérer.

D'après le paragraphe 4, je dois écrire que l'expression

$$\mathrm{S}\frac{\partial(p_4, p_1)}{\partial(u, v)}$$

est nulle, en vertu des équations de la congruence : σ doit être regardée comme une certaine fonction de u et de v définie par la relation

$$\mu_1 p_1^2+\mu_2 p_2^2+\mu_3 p_3^2=0,$$

qui est une conséquence des équations de la congruence et de l'identité entre les six coordonnées plückériennes. En dérivant cette relation et désignant les dérivées de μ_1, μ_2, μ_3 par rapport à l'unique variable σ par μ_1', μ_2', μ_3', on obtient des expressions de $\frac{\partial\sigma}{\partial u}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}$;

en portant ces expressions dans la relation

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\mathbf{S}\,\mu'_1 p_1\frac{\partial p_1}{\partial v}-\frac{\partial\sigma}{\partial v}\mathbf{S}\,\mu'_1 p_1\frac{\partial p_1}{\partial u}=0,$$

il vient

$$\mathbf{S}\,(\mu_1\mu'_2-\mu_2\mu'_1)p_1p_2\frac{\partial(p_1,p_2)}{\partial(u,v)}=0;$$

de l'identité

$$\frac{\partial(p_1,p_2)}{\partial(u,v)}=-2i\frac{p_3}{(1+uv)^2},$$

et des identités obtenues par permutations circulaires des indices, il résulte que les fonctions μ_1, μ_2, μ_3 satisfont à l'équation

$$\mathbf{S}\,(\mu_1\mu'_2-\mu_2\mu'_1)=0,$$

qui prend la forme d'une équation de Pfaff

$$\mu'_1(\mu_2-\mu_3)+\mu'_2(\mu_3-\mu_1)+\mu'_3(\mu_1-\mu_2)=0;$$

ou encore

$$\begin{vmatrix}\mu'_1 & \mu_1 & 1\\ \mu'_2 & \mu_2 & 1\\ \mu'_3 & \mu_3 & 1\end{vmatrix}=0;$$

la signification de cette équation de Pfaff est fort simple : si μ_1, μ_2, μ_3 sont regardées comme les coordonnées ordinaires d'un point, qui décrit une courbe lorsque σ varie, cette courbe figurative est plane et son plan passe par l'axe de symétrie ternaire du trièdre coordonné.

μ_1, μ_2, μ_3 ont pour expressions générales

$$\mu_1=k_1f(\sigma)+g(\sigma);$$
$$\mu_2=k_2f(\sigma)+g(\sigma);$$
$$\mu_3=k_3f(\sigma)+g(\sigma);$$

k_1, k_2, k_3 sont trois constantes arbitraires; $f(\sigma)$

et $g(\sigma)$ sont deux fonctions quelconques du paramètre σ; l'une quelconque de ces fonctions pourra être égale à σ, sauf dans le cas exceptionnel où elle serait constante; dans ce cas, l'autre fonction pourrait être prise égale à σ. Il résulte des expressions générales de μ_1, μ_2, μ_3 précédentes que la *famille cherchée la plus générale est constituée par des quadriques concentriques uniquement assujetties à la condition d'avoir mêmes directions de plans cycliques*. Il en est ainsi pour les quadriques de M. Humbert, pour lesquelles on a

$$\mu_1 = \alpha + \sigma,$$
$$\mu_2 = \beta + \sigma,$$
$$\mu_3 = \gamma + \sigma.$$

6. Ce même résultat, je vais l'établir en cherchant une famille de Lamé constituée par des quadriques concentriques et à axes inégaux (et par suite nécessairement coaxiales) telles que leurs génératrices engendrent une congruence dont la surface centrale soit réduite au centre commun de ces quadriques.

μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2 sont inversement proportionnels à A^2, B^2, C^2. Posons

$$\mu_1 = \frac{\theta}{A}, \qquad \mu_2 = \frac{\theta}{B}, \qquad \mu_3 = \frac{\theta}{C};$$

il vient

$$\mu_2\mu_3' - \mu_3\mu_2' = \frac{\theta^2}{A^2B^2C^2}A^2(CB' - BC'), \qquad \ldots;$$

et par suite, d'après la relation

$$\sum(\mu_2\mu_3' - \mu_3\mu_2') = 0,$$

on a, quel que soit le facteur θ,

$$\begin{vmatrix} A' & A & A^2 \\ B' & B & B^2 \\ C' & C & C^2 \end{vmatrix} \equiv \mathrm{S}\, A'BC(C - B) = 0.$$

La condition formée par Maurice Levy pour que les quadriques considérées appartiennent à un système triple orthogonal est d'autre part

$$\sum A' A(B - C) = 0;$$

des deux conditions il résulte que A', B', C' sont respectivement proportionnels à

$$A(B + C), \qquad B(C + A), \qquad C(A + B).$$

A, B, C sont donc trois fonctions intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{y(z+x)} = \frac{dz}{z(x+y)};$$

par le changement de variables défini par les formules

$$x = YZ, \qquad y = ZX, \qquad z = XY,$$

ce système se transforme en

$$dX = dY = dZ;$$

on a donc

$$X = \alpha + \sigma, \qquad Y = \beta + \sigma, \qquad Z = \gamma + \sigma$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned} A &= (\beta + \sigma)(\gamma + \sigma), \\ B &= (\gamma + \sigma)(\alpha + \sigma), \\ C &= (\alpha + \sigma)(\beta + \sigma); \end{aligned}$$

on reconnaît là les expressions des axes des quadriques de M. Humbert; X, Y, Z sont respectivement identiques à μ_1, μ_2 et μ_3.

7. Les équations des trois complexes linéaires qui ont en commun les génératrices d'un même système d'une quelconque des quadriques de M. Humbert

étant

$$p_4 = (\alpha + \sigma)p_1,$$
$$p_5 = (\beta + \sigma)p_2,$$
$$p_6 = (\gamma + \sigma)p_3,$$

il est possible de définir la congruence de ces génératrices, lorsque σ est variable, par les équations

$$(\beta - \gamma)\frac{p_4}{p_1} + (\gamma - \alpha)\frac{p_5}{p_2} + (\alpha - \beta)\frac{p_6}{p_3} = 0,$$

$$\alpha(\beta - \gamma)\frac{p_4}{p_1} + \beta(\gamma - \alpha)\frac{p_5}{p_2} + \gamma(\alpha - \beta)\frac{p_6}{p_3} + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = 0,$$

qui représentent respectivement deux complexes du troisième ordre; on peut encore envisager le troisième complexe du troisième ordre

$$(\beta - \gamma)p_1 p_5 p_6 + (\gamma - \alpha)p_2 p_6 p_4 + (\alpha - \beta)p_3 p_4 p_5 + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)p_1 p_2 p_3 = 0;$$

le premier complexe est celui des génératrices des quadriques polaires réciproques, par rapport à une sphère concentrique, des quadriques d'un système homofocal, et des quadriques homothétiques. Le complexe se transforme en le complexe tétraédral dans la transformation de droites (*voir* mon article, 1909, p. 256). Le troisième complexe est celui, considéré par M. Humbert, que forment les génératrices des quadriques de M. Humbert et de leurs surfaces homofocales (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1890, CXI, p. 964); la transformation de droites le change en un complexe de même nature.

Quant aux trois complexes linéaires, la transformation de droites les change en trois complexes qui sont constitués par des droites sur lesquelles deux des trois plans coordonnés interceptent des segments constants.

En se reportant à un article intitulé : *Sur un complexe du quatrième ordre*, qui paraîtra prochainement dans les *Nouvelles Annales*, on voit que la congruence de normales transformée de la congruence des génératrices des quadriques de M. Humbert n'est autre que celle des droites dont trois points invariables sont assujettis à rester dans les trois plans coordonnés.

8. Pour terminer, j'indiquerai comment peut être résolu le problème suivant : *Étant donné un complexe de droites, déterminer celles de ses congruences dont les surfaces centrales dégénèrent en des points*.

On se donnera le point, qui pourra être quelconque; on transformera alors le complexe, à l'aide de la transformation de droites définie par ce point. Les congruences cherchées admettant le point choisi pour surface centrale seront transformées en les congruences de normales du nouveau complexe, et le problème est donc réductible au problème de Transon.

Mais le problème actuel est beaucoup plus général que le problème de Transon, puisqu'il faut chercher les congruences de normales d'une triple infinité de complexes.