NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. FOUCHÉ

Sur les lignes géodésiques et les surfaces minima

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 153-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__153_1>

[O'51, O'6h]

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES ET LES SURFACES MINIMA;

PAR M. M. FOUCHÉ.

Je me propose d'indiquer un procédé de démonstration qui donne très rapidement et d'une manière analogue la condition pour qu'une ligne tracée sur une surface ait le minimum de longueur entre deux points, ou pour qu'une surface ait une aire minimum à l'intérieur d'un contour fermé. Ce procédé repose sur l'emploi des formules de Codazzi, et fournit en même temps la démonstration d'un théorème qui paraît présenter quelque importance.

I. *Lignes géodésiques.* — Je suppose la surface rapportée à un réseau rectangulaire, l'élément linéaire étant

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2.$$

La longueur d'une ligne allant du point $u_0 v_0$ au point $u_1 v_1$ est donnée par l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{A^2\,du^2 + B^2\,dv^2},$$

où v est une fonction de u, qui prend la valeur v_0 pour $u = u_0$ et la valeur v_1 pour $u = u_1$.

On peut encore écrire cette intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{A^2 + B^2 v'^2}\, du,$$

en désignant par v' la dérivée de v par rapport à u.

Si l'on change la fonction v, la variation de l'élément de l'intégrale sera

$$\frac{A\dfrac{\partial A}{\partial v} + B\dfrac{\partial B}{\partial v} v'^2 + B^2 v' \dfrac{\delta v'}{\delta v}}{\sqrt{A^2 + B^2 v'^2}}\, \delta v\, du.$$

Pour trouver la ligne minimum, il faut trouver une fonction de v pour laquelle cette variation soit nulle, et qui prenne les valeurs v_0 et v_1 respectivement pour $u = u_0$ et $u = u_1$.

Cherchons la condition pour que la ligne $v =$ const. soit minimum. Alors $v_0 = v_1$; mais il faut que la variation soit nulle. Comme $v' = 0$, il faut qu'on ait

$$A \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

et, puisque A ne peut être nul,

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0.$$

A ne doit être fonction que de u, et l'on obtient ainsi un résultat bien connu.

D'autre part, l'une des formules de Codazzi donne

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -rB,$$

et puisque B ne peut être nul, il faut que $r = 0$; ce qui veut dire que quand u varie seule, le trièdre mobile ne tourne pas autour de la normale à la surface. L'axe instantané de ce trièdre est donc dans le plan tangent à la surface. Mais le plan osculateur à la courbe où u varie seule est perpendiculaire au plan passant par la tangente et l'axe de rotation. Il est donc perpendiculaire au plan tangent. Finalement, le plan osculateur d'une ligne géodésique est normal à la surface. C. Q. F. D.

II. *Surfaces minima.* — Toute surface peut faire partie d'un système triple orthogonal, et cela d'une infinité de manières. Il suffit de lui adjoindre par exemple ses surfaces parallèles et ses normalies développables.

Si l'on rapporte tous les points de l'espace à un réseau formé de surfaces triplement orthogonales, l'élément linéaire de l'espace prend la forme

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2 + C^2\,dw^2,$$

où du, dv, dw désignent les éléments d'arc des normales aux trois surfaces.

Une surface quelconque sera définie si l'on donne w en fonction de u et de v.

Si l'on considère trois axes Ox, Oy, Oz coïncidant au point considéré avec les trois normales, on aura

$$dx = A\,du, \qquad dy = B\,dv, \qquad dz = C\,dw,$$

et le plan tangent à la surface sera défini par le système d'équations

$$\frac{X-x}{A\,du} = \frac{Y-y}{B\,dv} = \frac{Z-z}{C\,dw},$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv$$

ou

$$\frac{Z-z}{C} = \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{X-x}{A} + \frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{Y-y}{B},$$

ou encore

$$BC\frac{\partial w}{\partial u}(X-x)+CA\frac{\partial w}{\partial v}(Y-y)-AB(Z-z)=0.$$

Le cosinus de l'angle que fait ce plan avec le plan xOy sera donc

$$\frac{AB}{\sqrt{B^2C^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+A^2B^2}}.$$

Alors l'élément de surface correspondant aux variations du et dv des paramètres u et v se projettera sur le plan xOy suivant un rectangle ayant pour aire

$$AB\,du\,dv,$$

et cet élément lui-même aura pour valeur

$$\sqrt{B^2C^2\left(\frac{dw}{du}\right)^2+C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+A^2B^2}\,du\,dv.$$

L'aire comprise à l'intérieur d'un contour (C) sera

$$\int\int_{(C)}\sqrt{B^2C^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+A^2B^2}\,du\,dv.$$

Pour avoir l'aire minimum à l'intérieur du contour (C), il faudra trouver une fonction w de u et v ayant en chaque point de ce contour une valeur bien déterminée et telle que la variation de l'intégrale soit nulle. Or cette variation a pour expression, en se bornant à l'élément de l'intégrale

$$\frac{AB\left(A\frac{\partial B}{\partial w}+B\frac{\partial A}{\partial w}\right)\delta w}{\sqrt{A^2B^2+\ldots}}\cdots$$

plus des termes qui contiennent tous une des dérivées de w.

Si donc on veut que la surface où w est constante soit minimum, il faudra que la partie écrite plus haut soit nulle, ce qui donne, puisque ni A ni B ne peuvent être nuls,

$$A\frac{\partial B}{\partial w} + B\frac{\partial A}{\partial w} = 0.$$

Si l'on désigne les rotations du trièdre par p, q, r; p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, suivant que la seule variable est u, v ou w, les formules de Codazzi

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -rB, \qquad \frac{\partial B}{\partial u} = r_1 A$$

donnent par permutation tournante

$$\frac{\partial B}{\partial w} = -p_1 C, \qquad \frac{\partial A}{\partial w} = q C,$$

et l'équation précédente devient, en supprimant le facteur commun C :

$$p_1 A - q B = 0$$

ou

$$\frac{A}{q} - \frac{B}{p_1} = 0,$$

ce qui exprime que les deux rayons de courbure principaux ont la même valeur absolue, mais des signes contraires. C'est la propriété caractéristique bien connue des surfaces minima.

Si l'équation

$$A\frac{\partial B}{\partial w} + B\frac{\partial A}{\partial w} = 0$$

est vérifiée non seulement pour la valeur initiale de w, mais pour toute valeur de cette variable, c'est que le produit AB est indépendant de w. Alors toutes les surfaces de la première famille sont des surfaces minima.

Considérons sur l'une d'elles un contour fermé quelconque (C). Par chacun des points de (C) faisons passer la trajectoire orthogonale des surfaces minima ; toutes ces trajectoires orthogonales forment une surface normale aux surfaces minima, et qui découpe sur chacune d'elles une aire constante puisque l'expression de cette aire

$$\int\int_{(C)} \mathrm{AB}\, du\, dv$$

est indépendante de w.

Cette conclusion ne s'applique pas seulement aux surfaces minima faisant partie d'un système triplement orthogonal : elle s'applique également à une suite quelconque de surfaces minima et à leurs trajectoires orthogonales. Dans le langage de la Mécanique on dira que :

Si les surfaces de niveau sont des surfaces minima, un tube de force quelconque découpe des aires égales sur toutes ces surfaces.

Pour le démontrer, il suffit de reprendre le raisonnement précédent avec des coordonnées obliques. Soient w le paramètre définissant chacune des surfaces minima, u et v deux variables définissant sur l'une d'elles un réseau quelconque. Par chaque courbe de ce réseau on peut faire passer une surface orthogonale à toutes les surfaces minima, et l'on a ainsi un système de trois familles de surfaces correspondant aux variables u, v, w. Les courbes définies, pour une valeur particulière de w, par la variation de u seule ou de v seule, font entre elles un angle θ qui dépend des valeurs des trois variables au point d'intersection ; mais les courbes où w varie seule sont les trajectoires orthogonales des surfaces minima. L'élément linéaire de l'espace peut alors se mettre sous la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2E\, du\, dv + B^2 dv^2 + C^2 dw.$$

En raisonnant comme précédemment, on verra que le cosinus de l'angle du plan tangent à une surface quelconque avec le plan tangent à la surface $w =$ const. sera

$$\frac{AB}{\sqrt{A^2B^2 + B^2C^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2ABC^2 \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial w}\cos\theta}}.$$

L'élément de surface dw s'obtiendra en multipliant sa projection

$$AB \sin\theta\, du\, dv$$

par l'inverse de ce cosinus, ce qui donnera

$$dw = \sqrt{A^2B^2 \sin^2\theta + M}\, du\, dv,$$

M étant une somme de termes contenant les carrés et le produit des deux dérivées de w.

Pour que les surfaces $w =$ const. soient minima, il faut que la variation de cet élément de surface soit nulle quand w reste constante. Or, la variation de M contenant les dérivées de w ne donnera que des termes nuls, et il faudra que $AB\sin\theta$ soit indépendant de w, ce qui montre que l'aire

$$\int\int_{(C)} AB \sin\theta\, du\, dv$$

est indépendante de w comme on l'a annoncé.

Cette propriété des surfaces minima est à rapprocher de la propriété analogue des lignes géodésiques.