G. VALIRON

Note sur les déterminants de Wronsky

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 151-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__151_1>

[C1a]

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS DE WRONSKY;

PAR M. G. VALIRON.

Désignons par la notation

$$F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

le déterminant de Wronski relatif aux fonctions y_1, $y_2, \ldots, y_n$,

$$F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

On sait qu'étant donné un déterminant D de degré n, si l'on désigne par $D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ le déterminant obtenu en supprimant les colonnes de rang 1 et 2, et les lignes de rang $n-1$ et n, et par $\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ le déterminant obtenu en prenant les termes de la $n^{\text{ième}}$ et de la $(n-1)^{\text{ième}}$, ligne et ceux de la première et deuxième colonnes du déterminant adjoint, on a la relation

$$\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} = -D \times D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Prenons

$$D = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

on aura

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} = F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n)$$

et

$$\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} \\ = - F_2[F_{n-1}(y_2, y_3, \ldots, y_n), F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)],$$

comme on le constate aisément [le mineur de y_1^{n-2} dans F_n est égal à la dérivée de $F_{n-1}(y_2, \ldots, y_n)$].

On obtient ainsi la relation

$$F_2[F_{n-1}(y_2, y_3, \ldots, y_n), F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)] \\ = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n),$$

qui s'écrit encore en supposant que la fonction

$$F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n)$$

n'est pas identiquement nulle,

$$F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ = \frac{[F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)]^2}{F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n)} \frac{d}{dx}\left[\frac{F_{n-1}(y_2, \ldots, y_n)}{F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)}\right].$$

C'est cette relation que je voulais établir. On peut en déduire que lorsque $F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est identiquement nul il existe entre les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Car, en supposant $F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)$ non identiquement nul, on aura

$$\frac{F_{n-1}(y_2, \ldots, y_n)}{F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)} \equiv C_1,$$

d'où

$$F_{n-1}[(y_2 - C_1 y_1), y_3, \ldots, y_n] \equiv 0,$$

et ainsi de suite.