NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Le théorème de M. Picard pour les fonctions entières d'ordre nul

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 145-151

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__145_0>

[D4b]

LE THÉORÈME DE M. PICARD POUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une fonction entière d'ordre nul $f(z)$, le fait que $|f(z)|$ croît indéfiniment sur certains cercles [théorème de M. Wiman ([1])], a conduit M. Mattson ([2]) à penser que, si l'on prend la fonction $f(z)+a$, a étant une constante, le *rapport des nombres des zéros des deux fonctions, contenus dans un cercle de rayon r, tend vers un, lorsque r croît indéfiniment.* Dans mon Mémoire des *Mathematische Annalen* j'avais indiqué la fonction

$$f(z)=\prod_1^\infty \left\{1-\frac{z}{e_2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p\right]}\right\}^{\mathrm{E}\left(\frac{3}{2}\right)^p},$$

[où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du nombre x], comme échappant à la proposition précédente. Je vais considérer ici la fonction

$$\mathrm{F}(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{e^{2^p}}\right)^{2^p}, \tag{1}$$

qui donne des résultats plus nets.

1. Je vais d'abord calculer une valeur approchée

([1]) *Voir* mon Mémoire : *Sur les fonctions entières d ordre nul* (*Mathematische Annalen*, B. 70).

([2]) *Voir* RUBEN MATTSON, Thèse, Upsal, 1905, p. 47.

de $F(z)$ pour r voisin de e^{2^p}. Soit

$$z = e^{2^p} h e^{i\theta},$$

où h vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{2} < h < 2,$$

et où θ est l'argument de z. On peut écrire

(2) $$F(z) = A.B.C(1 - h e^{i\theta})^{2^p},$$

en posant

$$A = \frac{z^{\sum_1^{p-1} 2^p}}{e^{\sum_1^{p-1} 4^p}}, \qquad B = \prod_1^{p-1}\left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}\right)^{2^q},$$

$$C = \prod_{p+1}^{\infty}\left(1 - \frac{h e^{i\theta} e^{2^p}}{e^{2^r}}\right)^{2^r}.$$

On a immédiatement

$$A = \frac{e^{2^p(2^p-2)} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)}}{e^{\frac{4^p-4}{3}}},$$

ou

(3) $$A = e^{\frac{2}{3}4^p - 2.2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)}.$$

Calculons une valeur approchée de B. On a

$$\log B = \sum_1^{p-1} 2^q \log\left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}\right).$$

Mais

$$\log\left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}\right) = -\frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}(1 + \alpha_q),$$

où α_q est un nombre ayant pour limite zéro pour p

infini. Il vient donc

$$\log B = -\frac{1+\alpha}{he^{i\theta}e^{2^p}}\sum_{1}^{p-1} 2^q e^{2^q}, \qquad \lim_{p=\infty}\alpha = 0.$$

Or

$$\sum_{1}^{p-1} 2^q e^{2^q} < e^{2^{p-1}}\sum_{1}^{p-1} 2^q < e^{2^{p-1}}\, 2^p,$$

de sorte que

$$(4) \qquad |\log B| < \frac{(1+\alpha)e^{2^{p-1}}2^p}{he^{2^p}} < \eta,$$

quelque petit que soit η, pourvu que p soit assez grand. De même on aura

$$\log C = \sum_{p+1}^{\infty} 2^r \log\left(1 - \frac{he^{i\theta}e^{2^p}}{e^{2^r}}\right) = -(1+\alpha)he^{i\theta}e^{2^p}\sum_{p+1}^{\infty}\frac{2^r}{e^{2^r}};$$

or

$$\sum_{p+1}^{\infty}\frac{2^r}{e^{2^r}} < \frac{2^{p+1}}{e^{2^{p+1}}}(1+k),$$

où k est très petit, car le rapport d'un terme au précédent dans $\sum\limits_{p+1}^{\infty}$ est très petit.

On obtient donc encore ici

$$(5) \qquad |\log C| < (1+\alpha)he^{2^p}\frac{2^{p+1}}{e^{2^{p+1}}}(1+k) < \eta'.$$

η' étant arbitrairement petit, et p suffisamment grand. Les inégalités (4) et (5) donnent

$$B.C = (1+\varepsilon),$$

ε étant un nombre complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

En portant cette valeur et celle de A dans l'expression (2), on aura

$$(6)\quad F(z) = (1+\varepsilon)e^{\frac{2}{3}4^p - 2.2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)} (1 - he^{i\theta})^{2^p},$$

égalité valable pour $\frac{1}{2} < h < 2$ (et même dans de beaucoup plus larges limites).

2. Soit alors l'équation

$$(7)\qquad F(z) - ae^{i\omega} = 0.$$

Il résulte tout d'abord de l'égalité (6) que les deux fonctions $F(z)$ et $F(z) - ae^{i\omega}$ ont le même nombre de zéros dans les cercles de rayons

$$\frac{e^{2^p}}{2} \qquad \text{et} \qquad 2e^{2^p}.$$

En effet, la différence des nombres des zéros des deux fonctions contenus dans le cercle de rayon r est

$$n_0 - n_a = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_c d\left\{\log[F(z)]\right\} - \int_c d\left\{\log[F(z) - ae^{i\omega}]\right\}\right),$$

$\int_c$ désignant l'intégrale prise le long du cercle de rayon r; or l'expression précédente s'écrit

$$n_0 - n_a = \frac{1}{2\pi i} - \int_c d\left\{\log\left[1 - \frac{ae^{i\omega}}{F(z)}\right]\right\};$$

pour $r = \frac{e^{2^p}}{2}$ l'égalité (6) montre que

$$|F(z)| > e^{\frac{2}{3}4^p(1-\varepsilon_1)};$$

donc

$$\left|\frac{ae^{i\omega}}{F(z)}\right| < 1,$$

pourvu que p soit assez grand, c'est-à-dire qu'on a

$$n_0 = n_a.$$

On aura le résultat analogue pour le cercle de rayon $2e^{2^p}$.

Comme conséquence on voit que l'équation (7) a 2^p racines comprises entre les deux cercles considérés.

Nous allons calculer des valeurs approchées de ces racines.

3. En remplaçant dans (7) $F(z)$ par l'expression (6), nous aurons

$$(1+\varepsilon)e^{\frac{2}{3}4^p-2.2^p+\frac{4}{3}}h^{2^p-2}e^{i\theta(2^p-2)}(1-he^{i\theta})^{2^p}=ae^{i\omega},$$

ou encore, ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$,

$$e^{\frac{2}{3}4^p(1-\varepsilon')}e^{i\theta(2^p-2)}(1-he^{i\theta})^{2^p}=ae^{i\omega},$$

et par suite

$$(1-he^{i\theta})^{2^p}=\frac{ae^{i[\omega-\theta(2^p-2)]}}{e^{\frac{2}{3}4^p(1-\varepsilon')}},$$

d'où

$$(8)\qquad 1-he^{i\theta}=\frac{a^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3}2^p(1-\varepsilon')}}e^{i\left(\frac{\omega}{2^p}-\theta+\frac{\theta}{2^{p-1}}\right)}e^{i\frac{2k\pi}{2^p}},$$

avec $k=(0, 1, 2, \ldots, 2^p-1)$.

Il résulte de cette égalité que θ est d'ordre inférieur à $\frac{a^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3}2^p(1-\varepsilon)}}$, et que nous aurons en première approximation 2^p valeurs pour $he^{i\theta}$,

$$h_k e^{i\theta_k}=1-\frac{a^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3}2^p(1-\varepsilon')}}e^{i\frac{2k\pi}{2^p}}.$$

Les racines correspondantes de l'équation (7) sont

$$z_k=e^{2^p}h_k e^{i\theta_k}$$

Par suite :

Les 2^p *racines de l'équation* (7) *comprises entre les cercles de rayons* $\frac{e^{2^p}}{2}$ et $2e^{2^p}$ *ont sensiblement pour points représentatifs les sommets d'un polygone régulier ayant pour centre le point* e^{2^p} *et pour rayon* $e^{\frac{2^p}{3}(1-\varepsilon')}$.

Prenons alors le rapport des nombres des zéros des fonctions $F(z)$ et $F(z) - ae^{i\omega}$, ce rapport est égal à *un* pour le cercle de rayon

$$e^{2^p} - e^{\frac{2^p}{3}(1-\varepsilon')},$$

puis il va en décroissant jusqu'à une valeur voisine de $\frac{2}{3}$ pour le cercle $e^{2^p} - \varepsilon$, il saute à la valeur $\frac{3}{2}$ pour $e^{2^p} + \varepsilon$, puis décroît jusqu'à *un* pour le cercle

$$e^{2^p} + e^{\frac{2^p}{3}(1-\varepsilon')}.$$

Ce rapport n'a donc pas de limite.

Il importe de remarquer que, pour les deux fonctions

$$F(z) + a_1, \qquad F(z) + a_2,$$

le rapport en question aura bien pour limite *un*, quels que soient les nombres a_1 et a_2 différents de zéro, parmi les fonctions $F(z) + a$ une seule présente donc un cas d'exception.

4. La démonstration précédente met aussi en évidence l'inexactitude d'une proposition de M. Zöllich(1),

---

(1) Zöllich, *Beiträge zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen der Ordnung Null* (*Inaugural Dissertation*, Halle, 1908).

d'après laquelle les *zéros des fonctions* $f(z)+a$, $f(z)$ *étant une fonction entière d'ordre nul, sont situés à l'intérieur de cercles ayant pour centre les zéros de* $f(z)$ *et dont les rayons sont de l'ordre de l'inverse des modules des zéros.*

En terminant je remarquerai que la fonction $f(z)$, qui est certainement très spéciale, est pourtant *très régulière* puisque r_n étant le $n^{\text{ième}}$ zéro, on a

$$r_n = e^{hn},$$

avec

$$\frac{1-\varepsilon}{2} < h < 2(1+\varepsilon).$$