Nouvelles annales de mathématiques

G. Valiron

Note sur les séries alternées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 11 (1911), p. 136-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__136_0>

[D2b]

NOTE SUR LES SÉRIES ALTERNÉES;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une série alternée

$$a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

dont les termes décroissent en valeur absolue à partir d'un certain rang, et supposons que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série converge est que $\lim\limits_{n-\infty} a_n = 0$. Écrivons alors

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \alpha_n \qquad (\alpha_n > 0 \text{ d'après ce qui précède}).$$

La série alternée converge ou diverge suivant que la série dont le terme général est α_n diverge ou converge.

En effet, on a

$$a_{n+p} = \frac{a_n}{(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1})\ldots(1+\alpha_{n+p-1})},$$

d'où

$$a_{n+p} < \frac{a_n}{1 - (\alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p-1})}$$

et par conséquent, si $\Sigma\alpha_n$ diverge, le dénominateur croît indéfiniment a_{n+p} tend vers zéro.

De même, on peut écrire

$$a_{n+p} = a_n\left(1 - \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\alpha_{n+p-1}}{1+\alpha_{n+p-1}}\right)$$

$$> a_n\left[1 - \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1} + \ldots + \frac{\alpha_{n+p-1}}{1+\alpha_{n+p-1}}\right)\right]$$

Si la série α_n converge, la série $\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$ converge *a fortiori* et par conséquent on peut trouver n assez grand pour que

$$\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}+\ldots+\frac{\alpha_{n+p-1}}{1+\alpha_{n+p-1}}<\varepsilon,$$

quel que soit p, et ε étant arbitrairement petit. Il suit de là

$$a_{n+p}>a_n(1-\varepsilon),$$

quel que soit p. a_{n+p} ne tend pas vers zéro, la série diverge.

Le théorème est donc démontré.

Cas particuliers. — Si l'on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda(1-\varepsilon_n)}{n} \qquad \left(\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0,\ \lambda>0\right),$$

la série converge (elle est absolument convergente pour $\lambda>1$ d'après la règle de Duhamel, et diverge pour $\lambda<0$).

Si

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda(1-\varepsilon_n)}{n(\log n)^{1+\alpha}} \qquad \left(\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0,\ \lambda>0\right),$$

la série converge pour $0<\alpha\leqq 1$ (non absolument) et diverge pour $\alpha>1$, etc.